

MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK

(W. Sraumann, S.S. 1988)

Ziel dieser Vorlesung ist die Entwicklung der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel, welche im Hauptzyklus der Theoretischen Physik dauernd gebraucht werden.

INHALT:

- I. Anfangsgründe der Funktionentheorie
- II. Hilbert - Räume
- III. Orthogonale Polynome, Fourier-Reihen
- IV. Kugelfunktionen
- V. Fourier- und Laplace-Transformationen
- VI. Distributionen
- VII. Fundamentallösungen von partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Anfangs- und Randwertprobleme
- VIII. Spektraltheorie kompakter Operatoren

"Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, dass die Sprache in der Beweisführung die Feindin der Einfachheit wäre".

D. Hilbert (1900)

I. ANFANGSGRÜNDE DER FUNKTIONENTHEORIE

Die kurzen Ausführungen dieses Kapitels können natürlich einem so wunderbaren und reichen Gebiet der Mathematik nicht gerecht werden. Unser Ziel ist eine gewisse Handhabung des Residuenkalküls für praktische Rechnungen (weiterführende Literaturangaben finden sich am Ende dieses Kapitels.)

1. Holomorphe Funktionen

Die holomorphen Funktionen sind der hauptsächlichste Gegenstand der Funktionentheorie.

1.1. Erinnerungen an den Körper der komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen sind die Menge \mathbb{C} der geordneten Paare (a, b) , wobei a und b reelle Zahlen sind.

Addition und Multiplikation sind definiert durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Dann ist \mathbb{C} zu einem (kommutativen) Körper.

[Dies bedeutet: \mathbb{C} erfüllt die assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze für Addition und Multiplikation; $(0, 0)$ und $(1, 0)$ sind Identitäten für Addition, bzw.

Multiplikation, und es gibt ein multiplikatives Inverses für jedes von Null verschiedene Element von \mathbb{C} .]

Die Abbildung $a \mapsto (a, 0)$ definiert einen injektiven Körperhomomorphismus und wir können deshalb \mathbb{R} als Unterkörper von \mathbb{C} auffassen. Setzen wir $i = (0, 1)$, dann ist $(a, b) = a + ib$ und von dieser Stelle an wird die Paarnotation wie üblich verlassen. Da $i^2 = -1$ ist hat die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ Lösungen in \mathbb{C} .

Allgemein gilt für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw)$$

und somit ergibt sich für $z = a \in \mathbb{R}$, $w = b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Dies ist die Formel für das Inverse einer komplexen Zahl.

Für $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nennt man x den Realteil und y den Imaginärteil der komplexen Zahl z und benutzt die Bezeichnungen $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Indem wir jedem $z = x + iy$ die "konjugierte" komplexe Zahl $\bar{z} = x - iy$ zuordnen, definieren wir einen Automorphismus $z \mapsto \bar{z}$ des Körpers \mathbb{C} , denn

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'.$$

Diese Abbildung ist involutiv: $\overline{\bar{z}} = z$.

Die Norm (Absolutwert) einer komplexen Zahl

z ist definiert durch

$$|z| = (z\bar{z})^{1/2} \geq 0 \quad (= \text{für } z=0).$$

Sie hat die folgenden Eigenschaften:

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z| |z'|, \quad |1| = 1.$$

Mit Hilfe der Norm können wir in \mathbb{C} einen Entfernungsbegriff definieren: $|z-z'|$ ist wohl anderes als die Euklidische Entfernung in der Ebene \mathbb{R}^2 . Bezüglich dieses Entfernungsbegriffs ist \mathbb{C} vollständig, d.h. es gilt das Cauchy'sche Konvergenzkriterium: eine Punktfolge $z_n \in \mathbb{C}$ hat genau dann einen Grenzwert, wenn $\{z_n\}$ eine Cauchyfolge ist. Daraus ergibt sich der wohlbekannte Satz: Konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$.

Wir notieren noch die folgenden einfachen Beziehungen:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad |\bar{z}| = |z|.$$

Beweise auch

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten für $z = x+iy$

gemäss

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = |z|$$

erhalten wir die Polardarstellung

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dabei heisst φ das Argument von z und man schreibt $\varphi = \arg z$. Dieser Winkel ist mod 2π eindeutig bestimmt.

Eine besonders wichtige Eigenschaft des Körpers der komplexen Zahlen ist natürlich seine Abgeschlossenheit (Fundamentalsatz der Algebra). Diese kann besonders einfach mit funktionentheoretischen Methoden bewiesen werden (Korollar des Satzes von Liouville für beschränkte ganze Funktionen, siehe S. 25-26).

Von "kulturellem" Interesse ist die Tatsache, dass jeder zusammenhängende lokal kompakte topologische Körper entweder dem topologischen Körper der reellen Zahlen, dem topologischen Körper der komplexen Zahlen, oder dem topologischen Körper der Quaternionen isomorph ist.

1.2. Definition und Beispiele von holomorphen Funktionen

Zunächst benötigen wir den Begriff der komplexen Differenzierbarkeit einer komplexwertigen Funktion.

Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine (komplexwertige) Funktion. f heisst differenzierbar

an der Stelle z_0 , wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Ist f überall in U komplex differenzierbar und $^*) f': U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so heißt f holomorph.

Bemerkungen

Vermöge $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \ (x, y) \leftrightarrow x + iy$ können wir holomorphe Funktionen als Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auffassen. Z.B. entspricht die Multiplikation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $a+ib$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (*)$$

denn $(a+ib)(x+iy) = (ax-by) + i(bx+ay)$. Als Übungsaufgabe zeige man folgendes: $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann komplex differenzierbar an der Stelle z_0 , wenn f im reellen Sinne differenzierbar ist und das Differential df an der Stelle (x_0, y_0) ($z_0 = x_0 + iy_0$) die Multiplikation mit einer komplexen Zahl (nämlich mit $f'(z_0)$) ist.

Als Korollar ergibt sich deshalb folgendes: Die Funktion $f = u + iv$ ($u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) ist genau dann holomorph, wenn sie im reellen Sinne C^1 ist und Real- und Imaginärteil von f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$^*)$ Es wird bald gezeigt werden, dass die Stetigkeit von f' bereits folgt.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1)$$

erfüllen. Tabaddiert ist die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

genau dann eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn sie von der Gestalt (*) ist, woraus sich die Behauptung sofort ergibt.

Wir werden später sehen, dass eine holomorphe Funktion immer C^∞ ist. Deshalb gelten aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differenzialbedingungen auch die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

und folglich ist u harmonisch:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dies gilt auch für v , was man analog beweist.

Man sieht hier bereits, dass aus der Holomorphie sehr überraschende Schlüsse über das Verhalten der Funktionen gezogen werden können. Weitere "Wunder" werden wir später antreffen.

Wie im reellen Fall nennt man f' die Ableitung von f und f eine Stammfunktion von f' und wie dort beweist man für holomorphe Funktionen f, g

die Regeln:

$$(f+g)' = f' + g' ,$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Produktregel}),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{Quotientenregel}),$$

$$(g \circ f)' = g'(f(z)) f'(z) \quad (\text{Kettenregel}).$$

Die Funktionen, deren Ableitungen auf den linken Seiten stehen, sind alle holomorph!

Damit erhalten wir bereits eine grosse Menge von holomorphen Funktionen: Da konstante Funktionen und die Identität $z \mapsto z$ holomorph sind, sind auch alle durch Polynome mit komplexen Koeffizienten gegebenen Funktionen und ferner alle rationalen Funktionen (Quotienten von Polynomen), sofern im betrachteten Gebiet keine Nullstellen des Nenners liegen.

Eine weitere grosse Klasse liefern uns die konvergenten Potenzreihen. Für diese gilt der

Satz 1: Für eine gegebene Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiere man die Zahl ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, durch ^{*}

$$\rho^{-1} = \limsup |a_n|^{1/n}. \quad (1.2)$$

Dann gilt:

^{*}) Es sei an die Definition des Limes superior einer Folge reeller Zahlen a_n erinnert:

$$\limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}].$$

- (i) für jedes z mit $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe absolut;
- (ii) die Reihe divergiert für $|z| > \rho$ (über den Fall $|z| = \rho$ machen wir keine Aussage);
- (iii) die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $\{z : |z| \leq r\}$ für jedes $r < \rho$.

Überdies ist ρ die einzige Zahl mit den Eigenschaften (i) und (ii).

Beweis:

(i) Es sei $|z| < \rho$. Dann gibt es ein r mit $|z| < r < \rho$ und damit eine ganze Zahl N , so dass $|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r}$ für alle $n \geq N$. Somit gilt $|a_n| < 1/r^n$ und also $|a_n z^n| < (|z|/r)^n$ für alle $n \geq N$. Also wird die Restreihe $\sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$ durch die geometrische Reihe $\sum (|z|/r)^n$ majoriert und da $|z|/r < 1$ ist konvergiert also unsere Reihe absolut für jedes $|z| < \rho$.

(iii) Nun sei $r < \rho$ und R so gewählt, dass $r < R < \rho$. Wie oben gibt es ein N mit $|a_n| < 1/R^n$ für alle $n \geq N$. Somit gilt für $|z| \leq r$: $|a_n z^n| \leq (r/R)^n$ und $r/R < 1$. Nach dem Weierstrassschen Majorantenkriterium konvergiert also die Reihe gleichmäßig für $|z| \leq r$.

(ii) Für den Beweis von (ii) sei $|z| > \rho$ und r so gewählt, dass $|z| > r > \rho$. Nach der Definition

Von \limsup gibt es unendlich viele ganze Zahlen n mit $r^{-1} < |a_n|^{1/n}$. Für diese gilt also $|a_n z^n| > (|z|/r)^n$ und, da $|z|/r > 1$, wachsen diese Glieder unbeschränkt an, weshalb die Reihe divergiert. \square

Die Zahl ρ nennt man den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Beispiel. Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞ , wie man z.B. mit dem Quotientenkriterium sieht. Diese Reihe wird mit e^z oder $\exp z$ bezeichnet. Wie im Reellen beweist man mit Hilfe des Binomialsatzes die Funktionalgleichung

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

Ferner ergibt sich für $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right) + i \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Polardarstellung auf S. 4 folgendermaßen schreiben:

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arg z. \quad (1.3)$$

Notiere speziell $e^{i\pi} = -1$.

Die konvergenten Potenzreihen sind holomorphe Funktionen. Es gilt nämlich der

Satz 2: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist ^{die} durch $f(z) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gegebene Funktion $f: \{z: |z| < \rho\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. (Im Beweis wird auch die Ableitung von f bestimmt.)

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass die "formale Ableitung" $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ denselben Konvergenzradius ρ hat. Anschließend werden wir beweisen, dass f komplex differenzierbar ist und seine formale Ableitung als wirkliche Ableitung hat.

Wir müssen zeigen, dass $\rho^{-1} = \limsup |n a_n|^{1/n}$.

Nun folgt aus der Regel von L'Hospital $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n-1} = 0$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/(n-1)} = 1$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/(n-1)} = \rho^{-1}$. Nun sei $(\rho')^{-1} = \limsup |a_n|^{1/(n-1)}$.

Dann ist ρ' der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$. Da $a_0 + z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist, gilt

$$\text{für } |z| < \rho': \sum |a_n z^n| \leq |a_0| + |z| \sum |a_{n+1} z^n| < \infty.$$

Deshalb ist $\rho' \leq \rho$. Ist andererseits $|z| < \rho$ und $z \neq 0$, so gilt $\sum |a_n z^n| < \infty$ und $\sum |a_{n+1} z^n| \leq \frac{1}{|z|} \sum |a_n z^n| + \frac{1}{|z|} |a_0| < \infty$, weshalb $\rho \leq \rho'$. Somit ist $\rho' = \rho$.

Nun beweisen wir, dass f komplex differenzierbar ist und f' gleich der formalen Ableitung ist. Dazu sei $|z| < \rho$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$. Wir wählen einen Punkt w mit $|w| < \rho$ und $\epsilon > 0$ so, dass $|w| < \epsilon < \rho$ und bilden:

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \left[\frac{S_n(z) - S_n(w)}{z - w} - S_n'(w) \right] +$$

$$+ [s'_n(w) - g(w)] + \left[\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right].$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} &= \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - w^k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w}. \end{aligned}$$

Aber $\left| \frac{z^k - w^k}{z - w} \right| = \left| z^{k-1} + z^{k-2}w + \dots + w^{k-1} \right| \leq k r^{k-1}$

und folglich

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1}.$$

Da $r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1}$ und somit gibt es für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl N_1 , so dass für $n \geq N_1$

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (|z - w| < \delta).$$

Dabei ist $\delta > 0$ so gewählt, dass $\mathbb{B}(w; \delta) \subset \mathbb{B}(0; r)$.

Ferner gilt $\lim s'_n(w) = g(w)$, weshalb eine ganze Zahl N_2 existiert mit $|s'_n(w) - g(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_2$.

Es sei $n = \max(N_1, N_2)$. Dann können wir $\delta > 0$ so wählen, dass

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $0 < |z - w| < \delta$. Zusammengekommen gilt

dieses " $\varepsilon/3$ -Argument"

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < \varepsilon$$

für $0 < |z - w| < \delta$. Deshalb ist $f'(w) = g(w)$. \square

Bemerkung: Wir können den Satz 2 auf $f'(z)$ anwenden und durch Iteration sehen wir, dass f unendlich oft differenzierbar ist für $|z| < \rho$. Ferner dürfen wir gliedweise differenzieren:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k}.$$

Speziell erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Beispiel: $\frac{d}{dz} e^z = e^z.$

Natürlich stellt auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ im Inneren des Konvergenzkreises — auf $\{z: |z - z_0| < \rho\}$ — eine holomorphe Funktion dar.

Funktionen, die auf ganz \mathbb{C} definiert und holomorph sind, nennt man ganze Funktionen.

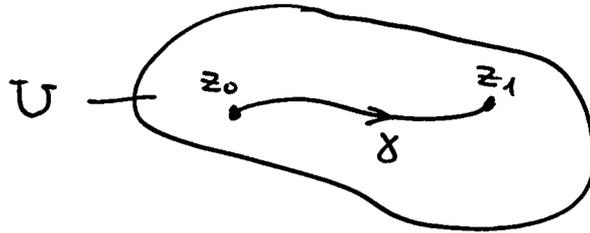
Beispiele von ganzen Funktionen:

$$e^z, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

2. Der Cauchy'sche Integralsatz

Um diesen zentralen Satz formulieren zu können, benötigen wir den Begriff des Kurvenintegrals einer Funktion.

Sei zunächst $U \subset \mathbb{C}$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow U$ eine C^1 -Kurve. Dann definieren



Wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt. \quad (2.1)$$

Aus der Substitutionsregel folgt, dass dieses Integral unabhängig von der Parametrisierung ist: Sei $\varphi: [t_0^*, t_1^*] \rightarrow [t_0, t_1]$ eine C^1 -Transformation mit $\varphi(t_0^*) = t_0$, $\varphi(t_1^*) = t_1$, dann ist

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (2.2)$$

Ist γ nur stückweise C^1 , d.h. $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow U$ ist stetig und es gibt $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1$, so dass $\gamma_i := \gamma|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$ jeweils C^1 ist, dann definieren wir natürlich*)

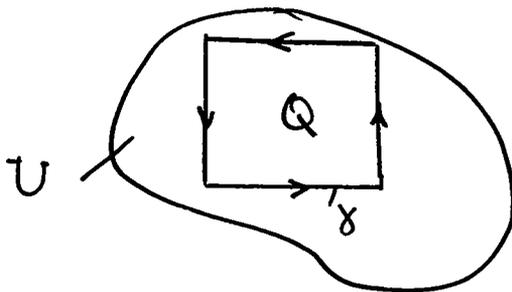
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz \quad (2.3)$$

und es ist klar, dass dann (2.2) immer noch gilt.

Nun beweisen wir den Cauchy'schen Integralsatz zunächst in seiner einfachsten Form.

Cauchy'scher Integralsatz für ein Rechteck: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, Q ein ganz in U gelegenes abgeschlossenes rechteckiges Rechteck und γ eine den Rand ∂Q von Q einmal im positiven Sinne durchlaufende Kurve, die stückweise C^1 ist. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (2.4)$$

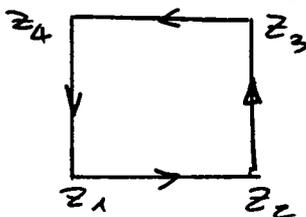


Beweis: Zunächst zeigen wir die Richtigkeit von (2.4) für zwei triviale Spezialfälle:

1) $f \equiv 1$. Dafür gilt für jede C^1 -Kurve $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stets

$$\int_{\alpha} dz = \int_a^b \dot{\alpha}(t) dt = \alpha(b) - \alpha(a),$$

und für unser Rechteck gilt mit den Bezeichnungen



*) Kurvenintegrale lassen sich allgemeiner für Wege von beschränkter Variation (rektifizierbare Wege) mit Hilfe von Riemann'schen Summen erklären (siehe [Co], Kapitel IV).

$$\int_{\gamma} dz = (\gamma(z_2) - \gamma(z_1)) + (\gamma(z_3) - \gamma(z_2)) + (\gamma(z_4) - \gamma(z_3)) + (\gamma(z_1) - \gamma(z_4)) = 0.$$

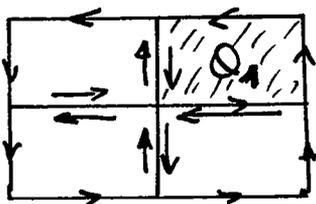
2) $f(z) \equiv z$. Dafür haben wir

$$\int_a^b \alpha(t) \alpha'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (\alpha(t))^2 dt = \frac{1}{2} [\alpha(b)^2 - \alpha(a)^2]$$

und damit ebenfalls $\int_{\gamma} z dz = 0$.

[Allgemeiner könnten wir Funktionen f betrachten, welche Ableitungen von holomorphen Funktionen auf U sind.]

Für den allgemeinen Fall unterteilen wir das Rechteck zuerst in vier gleiche Teile:



Sei Q_1 dasjenige dieser 4 Rechtecke, für welches das Integral über den Rand den grössten Betrag annimmt. Dann gilt für $\gamma_1 = \partial Q_1$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right|$$

da die Summe der vier Randintegrale gerade $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist. Diese Unterteilung setzen wir fort und erhalten eine Folge $Q > Q_1 > Q_2 > \dots$ von Rechtecken mit Randkurven $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots$, und es gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right|.$$

Sei z_0 der Grenzpunkt dieser Folge von Rechtecken:
 $\{z_0\} = \bigcap_{n \geq 1} Q_n$. Nun benutzen wir lediglich, dass f
 an der Stelle z_0 komplex differenzierbar ist. (Dies wird
 später für den Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes
 wesentlich sein.) Daraus gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein
 $\delta > 0$, so dass

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \leq \varepsilon$$

für alle z mit $0 < |z - z_0| < \delta$. Weil der Satz für
 lineare Funktionen sicher gilt, haben wir

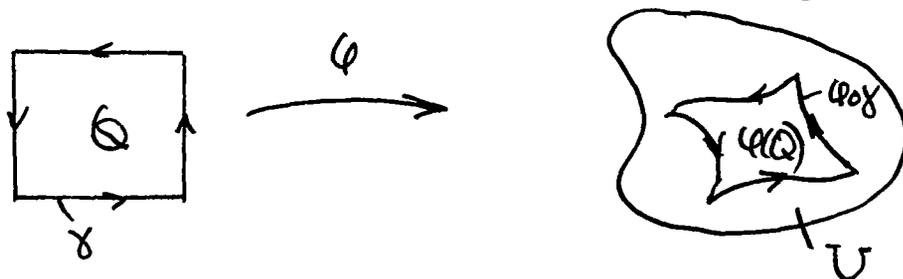
$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma_n} [f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)] dz \right| \\ &\leq \int_{\gamma_n} |f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| |dz|. \end{aligned}$$

Das letzte Integral können wir folgendermassen ab-
 schätzen. Ist ρ der Durchmesser und l der Umfang
 des Rechtecks Q , so ist $z^{-n} \rho$ der Durchmesser und
 $z^{-n} l$ der Umfang des Rechtecks Q_n . Wählen wir n
 so gross, dass $z^{-n} \rho < \delta$ ist, so ist der Integrand
 überall längs γ_n dem Betrag nach kleiner als $\varepsilon \cdot z^{-n} \rho$,
 und weil γ_n die Länge $z^{-n} l$ hat, gilt:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot z^{-n} l \cdot \varepsilon z^{-n} \rho = \varepsilon \rho l$$

für beliebig vorgegebenes ε . Damit ist (2.4) bewiesen. \square

Candyscher Integralsatz für Bilder von Rechtecken: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, \mathcal{Q} ein abgeschlossenes Rechteck und $\varphi: \mathcal{Q} \rightarrow U$ eine C^1 -Abbildung.



Sei, wie oben, γ eine stückweise C^1 -Kurve in $\partial\mathcal{Q}$, die \mathcal{Q} einmal umläuft. Dann ist

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Dieser verläuft fast genauso wie oben. Sicher gilt die Aussage, wenn f auf U eine holomorphe Stammfunktion hat, also insbesondere für lineare Funktionen $f(z) = c_0 + c_1 z$. Wieder konstruieren wir eine Folge $\mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q}_2 \supset \dots$, so dass

$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right|$$

ist. Nun müssen wir aber Durchmesser und Umfang von $\varphi(\mathcal{Q}_n)$ abschätzen. Da \mathcal{Q} kompakt und φ von der Klasse C^1 ist, gibt es eine Schranke für die Norm des Differentials $d\varphi$:

$$\|d\varphi_p\| \leq C \quad \text{für alle } p \in \mathcal{Q}.$$

Deshalb ist der Durchmesser von $\varphi(Q_n)$ nicht grösser als $\rho \cdot C \cdot z^{-n}$ und die Länge von $\varphi \circ \gamma_n$ nicht grösser als $l \cdot C \cdot z^{-n}$. Ist jetzt $z_0 \in \varphi(Q_n)$ und $\varepsilon > 0$. Wenden wir $\delta > 0$, so dass $|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$ für alle z mit $|z - z_0| < \delta$ und n so gross, dass $\rho \cdot C \cdot z^{-n} < \delta$. Dann gilt sicher für alle $z \in \varphi(Q_n)$ die Ungleichung $|z - z_0| < \delta$ und deshalb die Abschätzung

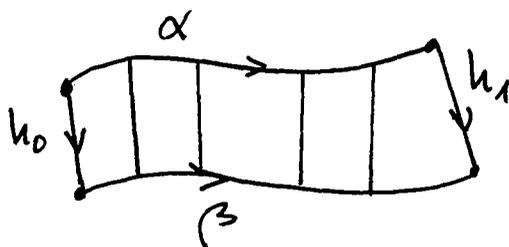
$$\left| \int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\varphi \circ \gamma_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot z^{-n} C l \cdot \varepsilon z^{-n} \rho C = C^2 l \rho \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$. \square

Bemerkung: Dieser Beweis benutzt nur die komplexe Differenzierbarkeit von f , aber nicht die Stetigkeit von f' .

Diese Form des Cauchy'schen Integralsatzes leistet uns bereits gute Dienste, wie sich bald zeigen wird. Zunächst geben wir einige Beispiele von Deckungsabbildungen.

Es seien $\alpha, \beta: [t_0, t_1] \rightarrow U$ zwei C^1 -Wege, mit der Eigenschaft, dass für jedes t die Verbindungsstrecke $\{(1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t) : \tau \in [0, 1]\}$ ganz in U



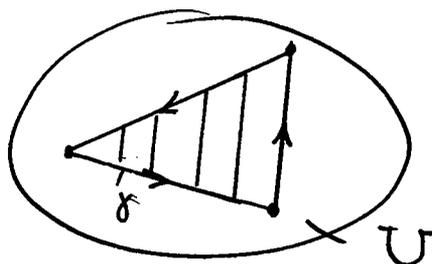
dreht. Dann gilt

$$\int_{h_0} f dz + \int_{\beta} f dz - \int_{h_1} f dz - \int_{\alpha} f dz = 0 ,$$

wobei $h_i: [0,1] \rightarrow U$ die Verbindungsstrecken (siehe Fig.) $h_i(\tau) = (1-\tau)\alpha(t_i) + \tau\beta(t_i)$ ($i=0,1$) sind. Der Beweis dieser Aussage ergibt sich daraus, dass $\varphi: (t,\tau) \mapsto (1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$ eine Rechtecksabbildung wie im Satze ist.

Durch Spezialisierung ergeben sich die folgenden Beispiele.

1. Dreieck in U :

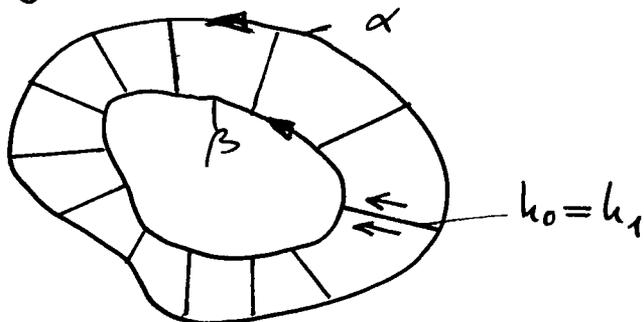


Umläuft γ einmal das Dreieck, so gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

2. Geschlossene Kurven : Sind α und β geschlossene Kurven, $\alpha(t_0) = \alpha(t_1)$, $\beta(t_0) = \beta(t_1)$ und die obige Voraussetzung erfüllt, dann ist

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz ,$$

denn die Integrale über h_0 und h_1 heben sich weg (s. Fig.)



Dies können wir insbesondere auf einen Kreisring anwenden:

$$\int_{|z-z_0|=\tau} f(z) dz = \int_{|z-z_0|=R} f(z) dz, \quad \leftarrow \text{Orientierung immer positiv gewählt}$$

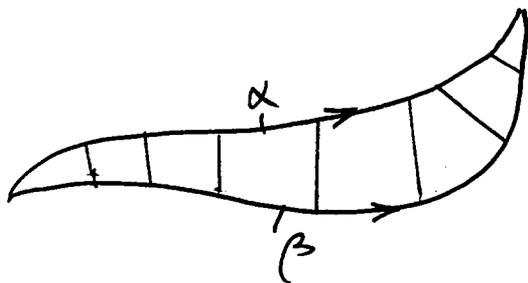
wenn $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und $\{z: \tau \leq |z-z_0| \leq R\} \subset U$. Speziell für $\tau=0$ erhalten wir

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z) dz = 0;$$

wenn $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und $\{z: |z-z_0| \leq R\} \subset U$.

3. Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten: Sind $\alpha, \beta: [t_0, t_1] \rightarrow U$ beide von der Klasse C^1 und liegen die geraden Verbindungen von $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ für jedes t ganz in U und haben α und β gleiche Anfangs- und Endpunkte, dann ist für jedes Holomorphe $f: U \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz.$$



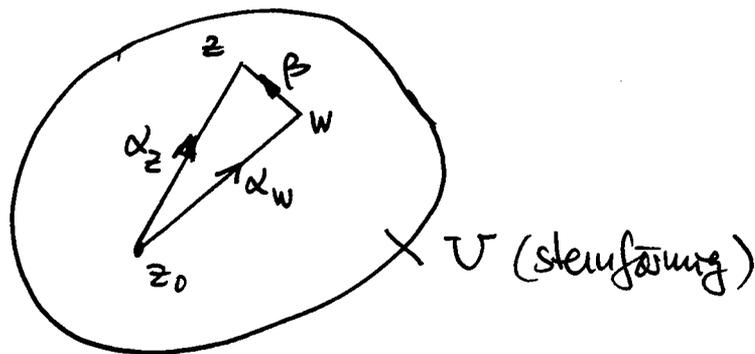
Als Konsequenz des 1. Beispiels (Dreieck in U) zeigen wir nun, dass in einem sternförmigen Gebiet jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion besitzt. Daraus folgt natürlich, dass für jeden geschlossenen Weg γ eines sternförmigen Gebietes U für jede in U holomorphe Funktion f die Aussage (2.4) gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Ist U sternförmig bezüglich z_0 , so definieren wir

$$F(z) = \int_{\alpha_z} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei $\alpha_z: [0,1] \rightarrow U$, $t \mapsto z_0 + t(z - z_0)$. Dann gilt mit den Bezeichnungen der nachstehenden Figur



$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} &= \frac{1}{z - w} \int_{\beta} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{z - w} \int_0^1 f(tz + (1-t)w) \cdot (z - w) dt \\ &= \int_0^1 f(tz + (1-t)w) dt. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(w). \quad \square$$

Bemerkung: 1) Dasselbe Argument liefert den Satz von Morera (siehe [KT], p. 40).

2) Der Cauchy'sche Integralsatz gilt somit auch für Gebiete (d.h. offene zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{C}), welche sich aus endlich vielen sternförmigen Gebieten zusammensetzen lassen. Grössere Allgemeinheit benötigen wir in unseren Anwendungen nicht.

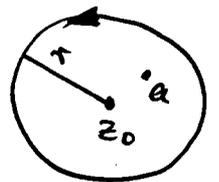
3. Einige Folgerungen aus dem Cauchy'schen Integralsatz

Ohne grosse Mühe können wir nun eine Reihe von überraschenden Folgerungen ziehen. Dazu benötigen wir zuerst

Satz 1 (Cauchy'sche Integralformel für eine Kreisscheibe):

Sei f komplex differenzierbar in einer die Kreisscheibe $\{z: |z-z_0| \leq r\}$ enthaltenden offenen Menge. Dann gilt für jedes a mit $|a-z_0| < r$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

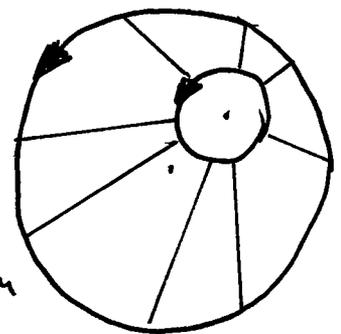


wobei das Integral im positiven Sinne umlaufen wird.

Beweis: Wir wissen bereits (S. 19), dass

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

ist, für genügend kleine ε (s. Fig.). Somit ist dieses Integral unabhängig von ε , insbesondere ist es gleich



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)}{z-a} dz$$

Null, da Integrand beschränkt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = 2\pi i f(a).$$

[benutze Parametrisierung $\gamma(t) = a + \varepsilon e^{it}$] □

Damit sind wir jetzt in der Lage, den folgenden bemerkenswerten Satz zu beweisen.

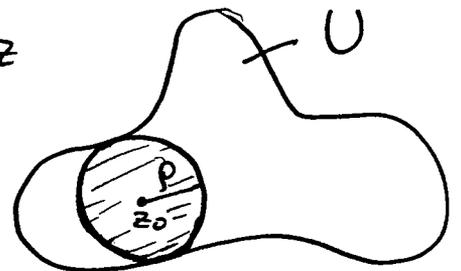
Satz 2 (Potenzreihenentwicklungssatz): Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Sei $\rho > 0$ und es sei die offene Kreisscheibe $\{z: |z-z_0| < \rho\}$ ganz in U enthalten. Dann gibt es genau eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius, die in einer Umgebung von z_0 die Funktion f darstellt. Es gilt sogar: Der Konvergenzradius ist mindestens ρ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

für alle z mit $|z-z_0| < \rho$, und für die Koeffizienten c_n gilt die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für alle $0 < \rho < \rho$.



Beweis: Eindeutigkeit: Wenn es eine solche Potenzreihe gibt, dann ist f in der Kreisscheibe $\mathbb{B}(z_0; \rho)$ beliebig oft komplex differenzierbar (S. 12) und $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit.

Existenz: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir $z_0 = 0$. Sei $|z| < r < \rho$. Dann gilt nach Satz 1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1-z/\zeta} d\zeta$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$: konvergiert für festes z gleichmäßig auf $|\zeta|=r$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

⏟
=: c_n

Damit haben wir eine gegen $f(z)$ konvergente Potenzreihe und für c_n gilt die behauptete Formel. \square

Als Korollar haben wir den Bemerkenswerten

Satz 3 (Satz von Goursat): Jede komplex differenzierbare Funktion ist holomorph und jede holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar (insbesondere C^∞).

Aus Satz 1 ergibt sich auch der

Satz 4 (Mittelwertsatz): Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\Delta z: |z - z_0| \leq r \subset U$. Dann ist der Wert $f(z_0)$ gleich dem Mittelwert der Funktionswerte auf dem Kreis $|z - z_0| = r$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt.$$

Beweis: Für die Parametrisierung $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$ gilt nach Satz 1

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}} r i e^{it} dt. \quad \square$$

Satz 5 (Cauchy'sche Abschätzung für die Taylorkoeffizienten):

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\Delta z: |z - z_0| \leq r \subset U$. Gilt ferner $|f(z)| \leq M$ für alle z mit $|z - z_0| = r$ und sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_0 . Dann gilt

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Formel für c_n in Satz 2. \square

Satz 6 (Satz von Liouville): Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis: Sei $|f(z)| \leq M$ auf ganz \mathbb{C} . Dann ist für jedes z

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{und} \quad |c_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

für jedes $r > 0$, also $f(z) = c_0 = \text{const.}$ \square

Satz 7 (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes Polynom von einem Grade ≥ 1 hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis: Sei $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, ein solches Polynom. Wegen $f(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)$ gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, d.h. für $M \in \mathbb{R}$ gibt es ein τ so, dass $|f(z)| \geq M$ für alle $|z| \geq \tau$. Hätte deshalb f keine Nullstelle, so wäre $\frac{1}{f(z)}$ eine beschränkte ganze Funktion, also konstant, im Widerspruch zur Annahme. \square

Unser nächstes Ziel ist der "Identitätssatz" für holomorphe Funktionen. Dazu beschäftigen wir uns zuerst mit dem Verhalten von holomorphen Funktionen in der Nähe von Nullstellen.

Definition: Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(z_0) = 0$. Unter der Ordnung der Nullstelle versteht man die Zahl k (falls es eine solche gibt) für die gilt $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, und so sonst.

Ist z_0 eine Nullstelle der Ordnung ∞ , dann verschwindet nach dem Polarisierensatz f in einer Umgebung von z_0 identisch.

Aus der Produktregel ergibt sich auch: Hat $h(z)$ eine einfache Nullstelle bei z_0 , so hat $f(z) = (h(z))^k$ eine k -fache Nullstelle bei z_0 . Nach dem folgenden Satz gilt davon auch die Umkehrung.

Satz 8 (Verhalten von holomorphen Funktionen in der Nähe von Nullstellen): Hat die holomorphe Funktion f bei z_0 eine k -fache Nullstelle, so gibt es ^{eine} in einer Umgebung U_0 von z_0 holomorphe Funktion h mit einer einfachen Nullstelle bei z_0 so, dass für alle $z \in U_0$

$$f(z) = (h(z))^k.$$

Beweis: Wir dürfen $z_0 = 0$ wählen. Nach Satz 2 gilt in einer Umgebung $\{z: |z| < \rho\}$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n, \quad c_k \neq 0.$$

Durch Übergang zu $\frac{1}{c_k} f$ dürfen wir $c_k = 1$ wählen. Dann ist auf $B(0; \rho)$

$$f(z) = z^k \left(1 + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n z^{n-k}}_{=: g(z)} \right) = z^k (1 + g(z)),$$

wobei g holomorph und $g(0) = 0$ ist. Nun versuchen wir eine holomorphe Funktion $\sqrt[k]{1+g(z)}$ zu erklären. Falls uns dies gelingt sind wir fertig.

Dies ist - im Unterschied zu \sqrt{z} - möglich, weil $1+g(0) = 1 \neq 0$ ist. Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass $z \mapsto z^k$ lokal biholomorph bei 1 ist, d.h. diese ^{holomorphe} Funktion ist bijektiv und die Umkehrung ist ebenfalls holomorph. Dies folgt wegen $\frac{d}{dz}(z^k)|_{z=1} = k \neq 0$ aus dem Umkehrsatz. Wir wählen

Umgebungen U_1, U_2 von 1 so, dass $U_1 \rightarrow U_2$,
 $z \mapsto z^k$ biholomorph ist. Ferner bezeichne $\chi =: \sqrt[k]{\cdot}$
 die Umkehrabbildung. Schließlich wählen wir eine
 Umgebung U_0 von 0 so, dass $1+g(z) \in U_2$ für alle
 $z \in U_0$. Dann ist $\chi(1+g(0)) = 1$ und deshalb hat
 $h(z) = z \cdot \chi(1+g(z))$ bei 0 eine 1-fache Nullstelle
 und ferner gilt $(h(z))^k = z^k(1+g(z)) = f(z)$ in U_0 . \square

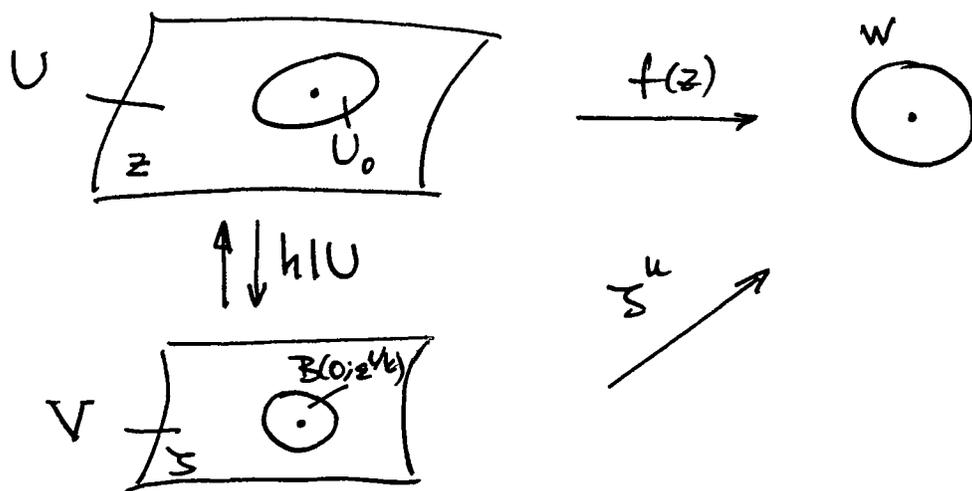
Dieses Resultat benutzen wir jetzt zum Beweis von

Satz 9 (Blätterzahl bei einer Nullstelle einer holomorphen Funktion): Sei z_0 eine k -fache Nullstelle einer holomorphen Funktion f . Dann gibt es zu jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U_ε von z_0 , die durch f auf die Kreisscheibe $\mathbb{B}(0; \varepsilon)$ abgebildet wird und zwar so, dass $f|_{U_\varepsilon}$ jeden Wert $w \in \mathbb{B}(0; \varepsilon)$ genau k -mal und den Wert 0 genau bei z_0 annimmt.

Bemerkung: Ist f ausserdem bijektiv in einer Umgebung von z_0 , so muss $f'(z_0) \neq 0$ sein, sonst bekäme man sofort einen Widerspruch zu Satz 9. Damit ist f auch biholomorph.

Beweis von Satz 9: Wieder dürfen wir $z_0 = 0$ wählen. Für den Spezialfall $f(z) = z^k$ ist der Satz natürlich richtig, denn zu $w = r e^{i\theta}$, $r > 0$ gibt es genau die k "Wurzeln"
 $r^{1/k} e^{i\theta/k}, r^{1/k} e^{i(\frac{\theta}{k} + \frac{2\pi}{k})}, \dots, r^{1/k} e^{i(\frac{\theta}{k} + (k-1)\frac{2\pi}{k})}$.

Für den allgemeinen Fall wenden wir Satz 8 an und dürfen also $f(z) = (h(z))^k$ voraussetzen, wobei h Holomorph mit $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$ ist. Deshalb ist h lokal biholomorph bei 0, d.h. es gibt offene Umgebungen U und V von 0 so, dass $h|_U: U \rightarrow V$ bijektiv, holomorph und $(h|_U)^{-1}$ ebenfalls holomorph ist. Ist nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\{z: |z| < \varepsilon^{1/k}\} \subset V$ liegt, so hat $(h|_U)^{-1} B(0; \varepsilon^{1/k}) =: U_0$ die gewünschte Eigenschaft (s. Fig.). \square



Damit kann nun der folgende äusserst überraschende Satz leicht bewiesen werden.

Satz 10 (Identitätssatz): Sei G ein Gebiet und $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge von G , welche in G einen Häufungspunkt besitzt, übereinstimmen. Dann ist $f = g$ auf ganz G .

Beweis: Sei z_0 ein solcher Häufungspunkt. Dann hat $h := f - g$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung,

dam sonst gäbe es nach Satz 9 eine Umgebung, die keine weiteren Nullstellen enthält (die Nullstellen endlicher Ordnung liegen isoliert). Die Menge M der Nullstellen unendlicher Ordnung ^{von f} ist also nicht leer. Sie ist offen nach dem Potenzreihenentwicklungssatz. Es ist aber auch $G \setminus M$ offen, denn ist $f(p) \neq 0$, so hat f in einer geeigneten Umgebung gar keine Nullstelle, und ist p eine Nullstelle endlicher Ordnung, so hat p in einer geeigneten Umgebung nach Satz 9 keine weiteren Nullstellen. Also ist M offen, abgeschlossen und nichtleer, und da G zusammenhängend ist folgt $M = G$. \square

Nach diesen Grundlagen kommen wir zu mehr praktischen Gegenständen.

4. Der Residuen-Kalkül

Zunächst ein paar Bemerkungen über isolierte Singularitäten.

Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f: U \setminus z_0 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von f . Diese heißt hebbar, wenn sich f durch geeignete Festsetzung von $f(z_0)$ zu einer holomorphen Funktion auf ganz U fortsetzen lässt. z_0 heißt Pol von f , wenn die Sing. z_0 nicht hebbar ist, aber ein $m \geq 1$ existiert, so dass $(z-z_0)^m f(z)$ eine hebbar Singularität bei z_0 hat. Das kleinste derartige m heißt die Ordnung des Poles.

Ist die isolierte Singularität z_0 von f weder hebbar noch ein Pol, so heisst sie eine wesentliche Singularität von f .

Zu den Polen notieren wir folgendes. Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(z_0) \neq 0$, $m > 1$. Dann hat

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$$

einen Pol m -ter Ordnung bei z_0 und umgekehrt: Hat $g: U \setminus z_0 \rightarrow \mathbb{C}$ bei z_0 einen Pol m -ter Ordnung, dann gibt es eine auf U holomorphe Funktion f mit $f(z_0) \neq 0$ und $g(z) = f(z)/(z-z_0)^m$, denn $(z-z_0)^m g(z)$ ist nach Voraussetzung zu einer holomorphen Funktion f faktorisierbar; und wäre $f(z_0) = 0$, so wäre nach dem Potenzreihenentwicklungssatz auch $(z-z_0)^{m-1} g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ noch holomorph in z_0 faktorisierbar, aber die Ordnung des Pols ist m .

Ist eine Funktion f bis auf Pole holomorph in U , so heisst sie meromorph in U .

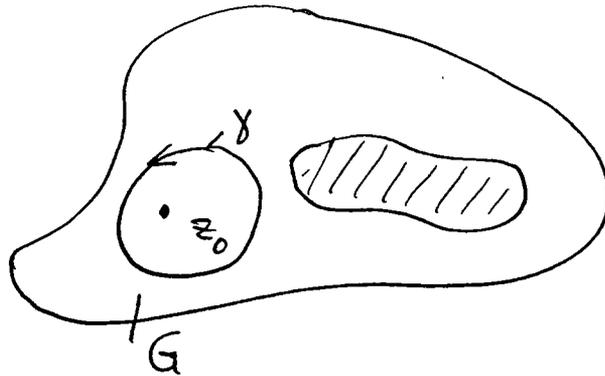
Hat f bei z_0 einen Pol m -ter Ordnung, so hat f die Form

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(z-z_0)^k},$$

wobei φ in einer Umgebung von z_0 holomorph ist. Der Koeffizient C_1 heisst das Residuum des Poles und man schreibt

$$C_1 = \text{Res } f|_{z_0}.$$

Nun betrachten wir den Residuensatz zunächst in seiner einfachsten Form. Es sei f eine Funktion, die in einem Gebiet G holomorph ist, bis auf einen Punkt z_0 , wo f einen Pol m -ter Ordnung hat. Ferner sei γ eine geschlossene (stückweise differenzierbare) Kurve, welche z_0 einfach positiv umläuft (s. Fig.)



und auf z_0 zusammenziehbar sei. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f |_{z_0}.$$

Der Beweis ergibt sich sofort: f hat die Form

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{k=1}^m \frac{C_k}{(z-z_0)^k},$$

wobei φ in G holomorph ist. Integrieren wir diese Gleichung über γ , so gibt φ nach dem Cauchy'schen Integralsatz keinen Beitrag und wir erhalten

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m C_k \int_{\gamma} \frac{1}{(z-z_0)^k} dz.$$

Ebenfalls nach dem Cauchy'schen Integralsatz dürfen

wir wählen für γ einen Kreis mit einem genügend kleinen Radius $\varepsilon > 0$ wählen. Wie auf S. 23 findet man

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{für } k \neq 1. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Die Verallgemeinerung auf mehrere Pole ist unmittelbar.

Satz (Residuensatz): U sei eine offene Teilmenge von \mathbb{C} , und die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ sei überall auf U holomorph, ausgenommen höchstens in isolierten Punkten von U , die Pole ^{*)} von f sind. γ sei der orientierte Rand einer in U enthaltenen kompakten Menge A , welche als stückweise differenzierbar vorausgesetzt wird. Ferner nehmen wir an, dass γ keinen singulären Punkt von f enthält. Dann liegen in A nur endlich viele singuläre Punkte, und es gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_k \text{Res } f|_{z_k} \right),$$

wobei sich die Summe rechts über die Polstellen $z_k \in A$ erstreckt.

Beweis: Jeder singuläre Punkt z_k der kompakten Menge $A \subset \mathbb{C}$ ist der Mittelpunkt einer im Inneren von A liegenden abgeschlossenen Kreisscheibe δ_k ; die Radien dieser Kreisscheiben können wir so klein wählen, dass diese Kreisscheiben paarweise

*) Man kann auch wesentliche Singularitäten zulassen, aber dazu müssten wir auch auf die Laurententwicklungen eingehen.

punktfremd sind. Der Rand der Kreisscheibe δ_k wird mit γ_k bezeichnet und mit positivem Durchlaufsinne versehen (s. Fig.).

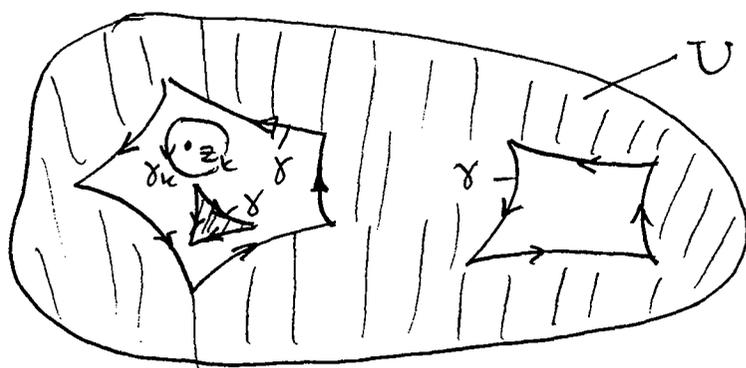


Fig. Das schraffierte Gebiet ist das Komplement der kompakten Menge A .

Jetzt sei A' die kompakte Menge, die entsteht, wenn wir aus A die Kreisscheiben δ_k herausnehmen; der orientierte Rand von A' ist die Differenz des orientierten Randes γ und der Kreise δ_k . Da f in der Umgebung von A' holomorph ist, gilt nach dem Cauchy'schen Integralsatz

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_k \int_{\delta_k} f(z) dz.$$

Andererseits ist nach S. 32

$$\int_{\delta_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f|_{z_k}. \quad \square$$

Bemerkung. Mit Hilfe der "Umlaufzahlen" von geschlossenen Kurven lässt sich der Residuensatz noch allgemeiner formulieren (siehe [Co], p. 108).

Nun illustrieren wir die komplexe Integrationsmethode, insbesondere Anwendungen des Residuensatzes, an einigen Beispielen.

1) Das Gauss'sche Integral :

$$-\infty \int^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} . \quad (1)$$

Beweis: Dieses im folgenden oft auftretende Integral kann reell berechnet werden, indem man für dessen Quadrat Polarkoordinaten einführt:

$$\begin{aligned} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr^2 = \pi . \quad \square \end{aligned}$$

Daraus folgt auch sofort für $a > 0$

$$-\infty \int^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} . \quad (2)$$

2) Die Fresnelintegrale

Diese treten z.B. in der Optik auf (Fresnelbeugung):

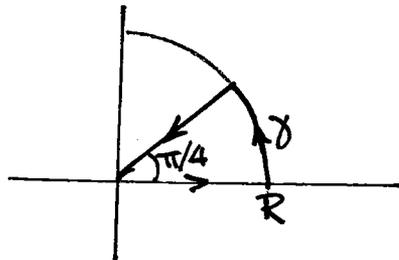
$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{4} \sqrt{2\pi} . \quad (3)$$

Herleitung: Mit dem Satz von Cauchy können wir diese Integrale auf das Gauss'sche Integral zurückführen. Dazu

Werten wir

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

aus, wobei γ der folgende geschlossene Weg ist:



Auf dem Kreisbogenstück ist $z = R e^{i\varphi}$, $z^2 = R^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$, also gilt:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + iR \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} e^{i\varphi} d\varphi - \int_0^R e^{-it^2} e^{i\pi/4} dt = 0.$$

Das zweite Integral verschwindet für $R \rightarrow \infty$, denn

$$\left| R \int_0^{\pi/4} \dots d\varphi \right| \leq \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \cos 2\varphi} d\varphi$$

und der Integrand konvergiert für $R \rightarrow \infty$ für alle $\varphi < \pi/4$ gegen Null. (Für eine sorgfältige Abschätzung siehe [SH], p.182.)

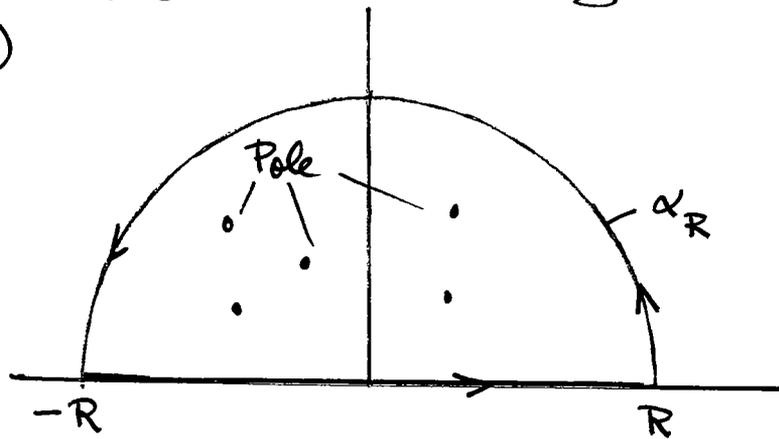
Damit erhalten wir

$$e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (4)$$

Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil erhalten wir (3). □

3) Fourierintegrale

Vorbemerkung: Es sei $F(z)$ auf der oberen Halbebene und auf der reellen Achse holomorph, ausser in endlich vielen auf der oberen Halbebene liegenden Polen. Ausserdem werde $zF(z)$ im erwähnten Gebiet für $z \rightarrow \infty$ gleichmässig gegen Null. Dann erhalten wir aus dem Residuensatz (mit den Bezeichnungen in der nachstehenden Figur)



$$\int_{-R}^{+R} F(x) dx + \int_{\alpha_R} F(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_j > 0} \text{Res} F|_{z_j}$$

und im Limes $R \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_j > 0} \text{Res} F|_{z_j} \quad (5)$$

Wir wenden jetzt dieses Resultat auf ein F der Gestalt

$$F(z) = f(z) e^{ipz} \quad (p > 0)$$

an, wobei f die obigen zwei Bedingungen erfüllt. Man sieht leicht, dass dies dann auch für die Funktion F gilt. Somit haben wir nach (5) für das Fourierintegral von f

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ipx} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_j > 0} \text{Res } f|_{z_j} \cdot e^{ipz_j} \quad (p > 0). \quad (6)$$

Ist $f(z)$ auf ganz \mathbb{C} meromorph mit höchstens endlich vielen Polen und gilt $z f(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, so erhalten wir entsprechend, falls die Pole (z_j) einfach sind,

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ipx} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_j < 0} \text{Res } f|_{z_j} e^{ipz_j} \quad (p < 0). \quad (7)$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$.

Diese Funktion erfüllt die Bedingungen für die Gültigkeit von (6). Sie hat in der oberen Halbebene den einzigen Pol bei $z = ia$. Dieser ist einfach und es gilt wegen

$$f(z) = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}, \quad \text{Res } f|_{ia} = \frac{1}{2ia}. \quad \text{Folglich gilt (6)}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|p|a} \quad (p \in \mathbb{R}). \quad (8)$$

In dieser Form gilt die Formel auch für $p < 0$!

4) Beispiele von Integralen mehrdeutiger Funktionen

Wir betrachten nun auch Integrale von "mehrwertigen" Funktionen einer komplexen Variablen. Dies gibt uns auch Gelegenheit zu zeigen, wie man mit solchen Funktionen verfährt. (Die folgende Kopie stammt aus [SH], §62.)

Als erstes Beispiel wählen wir das Integral

$$(38) \quad \int (-z)^{a-1} Q(z) dz.$$

Darin sei a eine reelle Zahl und $Q(z)$ eine rationale Funktion derart, daß $z^a Q(z)$ für $z \rightarrow 0$ und $z \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Der Integrand ist mehrdeutig, denn wenn z den Nullpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft, so durchläuft $-z$ denselben Weg, und daher wächst das Argument von $-z$ um den Summanden 2π . Somit multipliziert sich $-z$ selbst mit dem Faktor $e^{2\pi i}$, und $(-z)^{a-1}$ hat nach dem Umlauf die Gestalt $(-z)^{a-1} e^{2(a-1)\pi i}$, d. h., in diesem Falle wird die Funktion mit dem Faktor $e^{2(a-1)\pi i}$ multipliziert, der ungleich Eins ist, sofern a keine ganze Zahl ist. Der Nullpunkt ist also ein Verzweigungspunkt unseres Integranden. Um die Funktion eindeutig zu machen, schneiden wir die Ebene längs der positiven reellen Achse vom Punkt $z = 0$ an auf. In dieser aufgeschnittenen Ebene T ist unser Integrand eindeutig, und um ihn vollständig zu definieren, müssen wir das Argument von $-z$ in irgendeinem Punkt der T -Ebene vorgeben. Dementsprechend wollen wir annehmen, daß das Argument der negativen Zahl $-z$ auf dem oberen Ufer des Schnittes, auf dem z positiv ist, gleich $-\pi$ sei. Beim Durchlaufen irgendeines geschlossenen Weges um den Nullpunkt treffen wir vom oberen Ufer des Schnittes aus auf das untere, wobei das Argument von $-z$ den Zuwachs 2π erhält. Wir müssen also auf dem unteren Ufer des Schnittes das Argument von $-z$ gleich π annehmen. Bezeichnen wir den absoluten Betrag von z mit x , dann gilt

$$-z = xe^{-i\pi} \text{ auf dem oberen Ufer,}$$

$$-z = xe^{i\pi} \text{ auf dem unteren Ufer}$$

und folglich

$$(39) \quad \begin{cases} (-z)^{a-1} = x^{a-1} e^{-i(a-1)\pi} \text{ auf dem oberen Ufer,} \\ (-z)^{a-1} = x^{a-1} e^{i(a-1)\pi} \text{ auf dem unteren Ufer.} \end{cases}$$

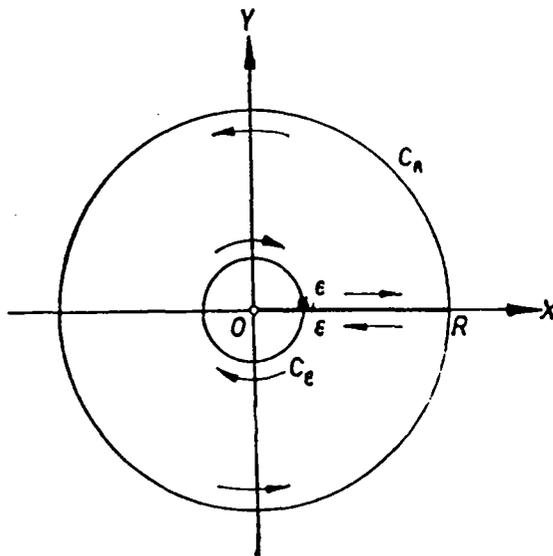


Abb. 62

Für das Integral (38) wählen wir jetzt den Integrationsweg l . Er sei eine geschlossene Kurve, die aus folgenden vier Stücken besteht: Aus dem Intervall (ϵ, R) des oberen Ufers des Schnittes, dem Kreis C_R um den Nullpunkt mit dem Radius R , der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, dem Intervall (R, ϵ) des unteren Ufers des Schnittes und schließlich aus dem Kreis C_ϵ um den Nullpunkt mit dem Radius ϵ , der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird (Abb.62).

Damit wir längs der positiven reellen Achse integrieren dürfen, setzen wir voraus, daß die rationale Funktion $Q(z)$ auf dem positiven Teil der reellen Achse keine Pole habe.

Nach dem Residuensatz ist der Wert des Integrals (38) gleich dem Produkt aus $2\pi i$ und der Summe der Residuen in allen Polen der rationalen Funktion $Q(z)$, die gleichzeitig auch Pole des Integranden sind; dabei möge ε hinreichend klein und R genügend groß gewählt sein, so daß alle erwähnten Pole innerhalb des durch unseren Integrationsweg begrenzten Gebietes liegen. Wir zeigen jetzt, daß die Integrale über die Kreise C_R und C_ε für $R \rightarrow \infty$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null streben. Verwendet man die übliche Integralabschätzung, so erhält man

$$\left| \int_{C_R} (-z)^{a-1} Q(z) dz \right| \leq 2\pi R \cdot R^{a-1} \max_{\text{auf } C_R} |Q(z)| = 2\pi R^a \max_{\text{auf } C_R} |Q(z)|.$$

Nach Voraussetzung gilt aber $z^a Q(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$, und folglich strebt der rechts stehende Ausdruck für $R \rightarrow \infty$ tatsächlich gegen Null. Entsprechend gilt auf dem Kreis C_ε folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{C_\varepsilon} (-z)^{a-1} Q(z) dz \right| < 2\pi \varepsilon^a \max_{\text{auf } C_\varepsilon} |Q(z)|,$$

und da nach Voraussetzung $z^a Q(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow 0$ gilt, strebt der letzte Ausdruck für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null. Also bleibt uns schließlich nur die Integration längs des oberen und unteren Ufers des Schnittes, wobei der Wert des Integranden dort durch die Formel (39) definiert ist. Sie liefert uns

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^R [x^{a-1} e^{-i\pi(a-1)} Q(x) - x^{a-1} e^{i\pi(a-1)} Q(x)] dx = 2\pi i \sum r.$$

Dabei ist $\sum r$ die Summe der Residuen in allen Polen der Funktion $(-z)^{a-1} Q(z)$, die im Endlichen liegen.

Berücksichtigt man, daß $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$ ist, so kann man die letzte Gleichung wie folgt schreiben:

$$(e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}) \int_0^\infty x^{a-1} Q(x) dx = 2\pi i \sum r$$

oder (gemäß der EULERSchen Formel)

$$(40) \quad \int_0^\infty x^{a-1} Q(x) dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \sum r.$$

Die Beziehung (40) gibt die Möglichkeit, viele bestimmte Integrale zu berechnen, deren Stammfunktionen nicht in geschlossener Form angebar sind. Wir erinnern nochmals an die Voraussetzungen, die die Funktion $Q(z)$ erfüllen muß, damit diese Formel gilt: *Die Funktion $Q(z)$ muß eine rationale Funktion sein, die auf dem positiven Teil der reellen Achse keine Pole hat und außerdem die Bedingungen*

$$z^a Q(z) \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow 0 \text{ und } z \rightarrow \infty$$

erfüllt.

Als spezielles Beispiel betrachten wir das Integral

$$(41) \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1).$$

Die Funktion

$$Q(z) = \frac{1}{1+z}$$

erfüllt, wie man leicht sieht, alle oben angegebenen Bedingungen und hat den einzigen Pol $z = -1$. In ihm hat die Funktion

$$\frac{(-z)^{a-1}}{1+z}$$

ein Residuum, das man wiederum nach der Regel bestimmt: Zähler, dividiert durch die Ableitung des Nenners. Es ist also

$$r = (-z)^{a-1} \Big|_{z=-1}$$

Wir müssen uns bei der Berechnung des Wertes der Funktion $(-z)^{a-1}$ im Punkt $z = -1$ nach der oben angegebenen Definition dieser mehrdeutigen Funktion richten: Auf dem oberen Ufer des Schnittes ist das Argument von $-z$ gleich $-\pi$, und folglich ist es nach halbem Umlauf um den Nullpunkt auf dem negativen Teil der reellen Achse gleich Null. D. h., es ist

$$r = 1.$$

Schließlich ergibt sich nach Formel (40) für das Integral (41) der Wert

$$(42) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Als zweites Beispiel eines Integrals über eine mehrdeutige Funktion wählen wir

$$(43) \quad \mathcal{J} := \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{A + 2\frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz. \quad (\text{Wurde in der Vorlesung auf})$$

Dabei setzen wir voraus, daß der Ausdruck $A + 2\frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}$ reelle Koeffizienten und reelle verschiedene Nullstellen $z = z_1$ und $z = z_2$ mit $0 < z_1 < z_2$ hat.

Wir wollen außerdem $A < 0$ annehmen, woraus unmittelbar folgt, daß obiger Ausdruck für $z_1 < z < z_2$ positiv ist. In (43) wird über das Intervall $z_1 \leq z \leq z_2$ der reellen Achse integriert und die Wurzel in diesem Intervall als positiv vorausgesetzt. Der Integrand

$$(44) \quad \sqrt{A + 2\frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \frac{\sqrt{A(z-z_1)(z-z_2)}}{z}$$

hat in z_1 und z_2 Verzweigungspunkte erster Ordnung. Schneiden wir die Ebene längs des Intervalls (z_1, z_2) der reellen Achse auf, dann ist die Funktion (44) in der so entstehenden T -Ebene regulär und eindeutig [19].

Wir setzen die Wurzel auf dem unteren Ufer des Schnittes als positiv voraus. Um zum oberen Ufer zu gelangen, müssen wir einen der Verzweigungspunkte umgehen, und auf dem oberen Ufer ist dann die Wurzel negativ [19]. Wir integrieren also längs des gesamten Randes des Schnittes in positiver Richtung, d. h., wir integrieren über die Funktion (44) längs des unteren Ufers in der Richtung von z_1 nach z_2 und längs des oberen von z_2 nach z_1 . Der erste Teil dieser Integration liefert uns offensichtlich das Integral (43). Bei der Integration längs des oberen Ufers wechselt der Integrand das Vorzeichen, aber auch die Integrationsrichtung geht in die entgegengesetzte über. Folglich ist der Wert des Integrals längs des oberen Ufers derselbe wie der längs des unteren. Der Wert des Integrals über den gesamten Rand des Schnittes ist also gleich dem Doppelten des Integrals (43).

Nach dem CAUCHYSchen Satz können wir, ohne den Wert des Integrals zu ändern, eine stetige Deformation unseres geschlossenen Weges unter der Bedingung vornehmen, daß dabei das Regularitätsgebiet der Funktion (44) nicht verlassen wird. Ist l irgendein geschlossener Weg, der

den obengenannten Schnitt im Innern enthält, und zwar so, daß der einfache Pol $z = 0$ der Funktion (44) im Äußeren von l liegt, so folgt aus den vorigen Überlegungen, daß

$$(45) \quad J = \frac{1}{2} \int_l \sqrt{A + 2 \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz$$

ist. Wir wollen jetzt die Funktion (44) in der Nähe von $z = \infty$ und $z = 0$ entwickeln. Im ersten Falle können wir schreiben:

$$\sqrt{A + 2 \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \sqrt{A} \left[1 + \left(2 \frac{B}{Az} + \frac{C}{Az^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wendet man die Binominalformel an, so bekommt man

$$(46) \quad \sqrt{A + 2 \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \sqrt{A} \left(1 + \frac{B}{A} \frac{1}{z} + \dots \right).$$

Es soll der Wert von \sqrt{A} in dieser Formel bestimmt werden. Dazu betrachten wir die rechte Seite von (44). Sie ist nach Voraussetzung auf dem unteren Ufer des Intervalls (z_1, z_2) positiv. Um vom unteren Ufer aus zum Intervall $(z_2, +\infty)$ der reellen Achse zu gelangen, muß man den Punkt $z = z_2$ entgegen dem Uhrzeigersinn umgehen. Dabei vergrößert sich das Argument der Differenz $z - z_2$ um π , jedoch das Argument des Ausdruckes (44) um $\frac{\pi}{2}$; letzteres ist also nicht gleich Null, sondern gleich $\frac{\pi}{2}$. Mit anderen Worten, die Funktion (44) muß im Intervall $(z_2, +\infty)$ der reellen Achse als positiv imaginär vorausgesetzt werden. (Als positiv imaginär bezeichnen wir die Zahl ia mit $a > 0$.) Aus (46) folgt dann, daß auch \sqrt{A} als positiv imaginär angenommen werden muß.

Entsprechend muß man, um vom unteren Ufer des Intervalls (z_1, z_2) zum Intervall $(0, z_1)$ zu gelangen, den Punkt $z = z_1$ im Uhrzeigersinn umlaufen. Nach diesem Umlauf ist das Argument des Ausdruckes (44) gleich $-\frac{\pi}{2}$, dieser Ausdruck selbst ist also im Intervall $(0, z_1)$ negativ imaginär.

Wir schreiben jetzt die Entwicklung der Funktion (44) in der Nähe von $z = 0$ auf:

$$\sqrt{A + 2 \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \frac{\sqrt{C}}{z} \left[1 + \left(2 \frac{Bz}{C} + \frac{Az^2}{C} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

oder nach der binomischen Formel:

$$(47) \quad \sqrt{A + 2 \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} = \frac{\sqrt{C}}{z} \left(1 + \frac{B}{C} z + \dots \right).$$

Auf Grund der vorigen Überlegungen muß \sqrt{C} als negativ imaginär angenommen werden. Wir erinnern daran, daß nach Voraussetzung $A < 0$ ist und aus der Ungleichung $z_2 > z_1 > 0$ auch $C < 0$ folgt.

Nach dem CAUCHYSchen Satz ist das Integral über die Funktion (44) längs eines größeren geschlossenen Weges L in der Umgebung von $z = \infty$ gleich der Summe der Integrale über den obenerwähnten Weg l und über den Weg λ , der um $z = 0$ herumführt. Dabei sind beide Integrationen entgegen dem Uhrzeigersinn auszuführen. Die Integrale über L und λ sind gleich dem Produkt von $2\pi i$ mit dem Koeffizienten von z^{-1} in den Entwicklungen (46) und (47). Folglich gilt

$$\int \sqrt{A + 2 \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}} dz = 2\pi i \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right) \xrightarrow{(45)} \underline{\underline{J = i\pi \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right)}}.$$

s) Die Gammafunktion

Diese ist durch das Eulersche Integral (2. Art)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (9)$$

definiert.

$$\left(t^z = e^{z \log t} \right)$$

Da $|t^{z-1} e^{-t}| = t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}$ ist dieses Integral für $\operatorname{Re} z > 0$ wohldefiniert. Man kann sich davon überzeugen, dass unter dem Integral nach z differenziert werden darf und deshalb Γ für $\operatorname{Re} z > 0$ eine holomorphe Funktion ist. (Für Einzelheiten siehe z.B. [SM], § 71.)

Diese Funktion lässt sich links der imaginären Achse holomorph fortsetzen. Dazu schreiben wir (9) in der Form

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Darin definiert der 2. Term eine ganze Funktion. Im ersten Integral lässt sich e^{-t} im Integrationsintervall $[0, 1]$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln: $e^{-t} = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u t^u}{u!}$.
Mit gliedweiser Integration erhalten wir

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u}{u!} \left[\frac{t^{u+z}}{u+z} \right]_{t=0}^{t=1}.$$

Für $\operatorname{Re} z > 0$ kommt

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u}{u!} \frac{1}{z+u}.$$

Also haben wir für $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt}_{\text{ganze Funktion}} \quad (10)$$

Nun definiert aber die rechte Seite offensichtlich eine meromorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} , mit den einfachen Polen bei

$$z = 0, -1, -2, \dots \quad (11)$$

Das Residuum des Pols $z = -n$ ist gleich $(-1)^n/n!$.

Beachte, dass nach dem Identitätssatz diese Fortsetzung eindeutig ist!

Für ganze positive Argumente erhält man mit partieller Integration sofort

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n! \quad , \quad \Gamma(1) = 1 \quad (12)$$

Nun leiten wir eine besonders wichtige Funktionalgleichung her. Es sei zunächst $x > 0$. Dafür gilt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \left[-e^{-t} t^x \right]_{t=0}^{t=\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

d.h.

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

Nach dem Identitätssatz ist deshalb überall in \mathbb{C}

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad , \quad (13)$$

ausser für $z = -1, -2, \dots$.

Als nächstes leiten wir die folgende umkehrte Formel

hier:

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (14)$$

Dazu sei jetzt $z \in (0, 1)$. Setzen wir $t = u^z$, so kommt

$$\Gamma(z) = z \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^z}}{u^{2z-1}} du.$$

Esetzt man z durch $1-z \in (0, 1)$, so hat man

$$\Gamma(1-z) = z \int_0^{\infty} \frac{e^{-v^z}}{v^{1-2z}} dv.$$

Durch Multiplikation ergibt sich

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^z+v^z)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} du dv,$$

oder nach Einführung von Polarkoordinaten (ρ, φ)

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \Gamma(1-z) &= 4 \underbrace{\int_0^{\infty} d\rho \rho}_{1/2} e^{-\rho^z} \int_0^{\pi/2} d\varphi \varphi^{2z-1} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \varphi^{2z-1}. \end{aligned}$$

Nach der Variablensubstitution $\varphi = \arccos \sqrt{x}$ kommt mit $d\varphi = -dx / [2\sqrt{x}(1+x)]$:

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx.$$

Dieses Integral wurde für $z \in (0, 1)$ auf S. 41 berechnet, mit dem Resultat (14). Nach dem Identitätssatz gilt dies über ganzen Holomorphiegebiet, d.h. bis auf $z \in \mathbb{Z}$. Speziell

für $z = \frac{1}{2}$ ergibt sich $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, also

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \sqrt{\pi}. \quad (15)$$

Nun führen wir noch die Eulersche Betafunktion ein

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0). \quad (16)$$

Da $|x^{p-1} (1-x)^{q-1}| = x^{\operatorname{Re} p - 1} (1-x)^{\operatorname{Re} q - 1}$ ist B wohldefiniert für alle $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0$. Durch die Variablensubstitution $t = 1-x$ ergibt sich sofort

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (17)$$

Die Funktion $B(p, q)$ lässt sich folgendermaßen durch die Γ -Funktion ausdrücken:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (18)$$

Beweis: Wie auf der letzten Seite ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u^2+v^2)}}{(u^2+v^2)^{p+q}} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \\ &= 4 \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} \rho^{2(p+q)-1} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\rho. \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $\rho = \sqrt{t}$, $x = \cos^2 \varphi$ ergibt sich daraus

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \underbrace{2 \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p+q-1} dt}_{\Gamma(p+q)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx}_{B(p, q)}. \quad \square$$

In diesem Zusammenhang geben wir noch die Gamma - Stirlingsche Formel an, welche z.B. in der statistischen Mechanik oft gebraucht wird: Für alle natürlichen Zahlen n ist

$$\boxed{n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{1/12n}}, \quad 0 \leq \nu \leq 1. \quad (19)$$

Dies lässt sich mit elementaren Methoden der reellen Analysis beweisen; siehe z.B.: H. Mesdickowski, "Wahrscheinlichkeitsrechnung", B.I 285/285a, p. 80.

Schlusslich bestimmen wir noch die Volumina des Balls und der Sphäre in n Dimensionen: $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, $S^{n-1} = \partial B^n$. Dazu berechnen wir zunächst das folgende Integral auf zwei Arten aus:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx &= \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right]^n = \pi^{n/2} \\ &= \int_0^\infty e^{-t^2} t^{n-1} dt \operatorname{vol}(S^{n-1}) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \operatorname{vol}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Dies gibt

$$\boxed{\operatorname{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.} \quad (20)$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\operatorname{vol}(B^n)} = \int_{|x| \leq 1} dx = \int_0^1 t^{n-1} dt \operatorname{vol}(S^{n-1}) = \frac{1}{n} \underline{\operatorname{vol}(S^{n-1})},$$

d.h.

$$\boxed{\operatorname{vol}(B^n) = \frac{2\pi^{n/2}}{n \Gamma(n/2)}.$$

6) Darstellung von $\Gamma(z)$ durch ein Kurvenintegral

Wir geben nun noch eine Darstellung von $\Gamma(z)$ durch ein Kurvenintegral, die für alle z gilt und im nächsten Abschnitt gebraucht wird.

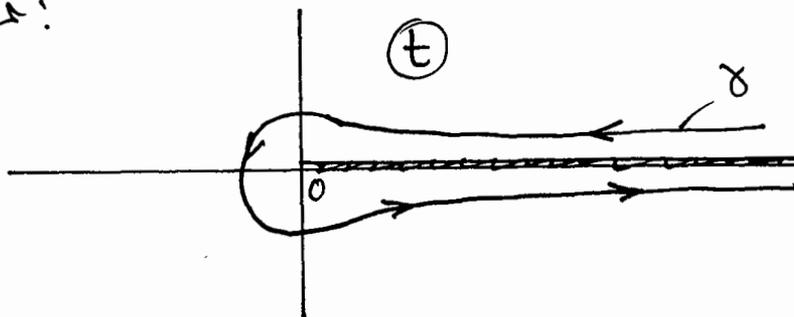
Für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt die Darstellung (9), d.h.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Nun analysieren wir den Integranden

$$e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1) \log t} \quad (22)$$

als Funktion der komplexen Variablen t . Diese hat bei $t=0$ einen Verzweigungspunkt, d.h. die Funktion ist nicht in einer Umgebung von $t=0$ holomorph. Deshalb schneiden wir die Ebene längs der positiven reellen t -Achse auf. In der so aufgeschnittenen t -Ebene ist die Funktion (22) eindeutig, wobei wir $\log t$ auf dem oberen Ufer des Schnittes als reelle Zahl voraussetzen ($\arg t$ ist dort gleich Null). Statt längs des oberen Ufers der reellen Achse zu integrieren, nehmen wir den neuen Integrationsweg γ in der folgenden Figur:



Nach dem Cauchy'schen Satz können wir, ohne den

Wert des Integrals

$$\int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (t^{z-1} = e^{(z-1) \log t}) \quad (23)$$

zu ändern, den Weg deformieren, wobei allerdings die Enden festgehalten werden müssen und der singuläre Punkt $t=0$ nicht berührt werden darf.

Nun beweisen wir die folgende Formel

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (24)$$

Dabei nehmen wir zunächst an, dass $\operatorname{Re} z > 0$. Da aber das Integral (23) eine ganze Funktion von z ist, gilt die Beziehung (24) nach dem Identitätssatz in der ganzen z -Ebene.

Durch Deformation des Integrationsweges γ kann man erreichen, dass über folgende drei Stücke zu integrieren ist:

1. über das Intervall $(+\infty, \varepsilon)$ des oberen Ufers des Schnittes;
2. über den Kreis λ_{ε} um $z=0$ mit dem Radius ε und
3. über das Intervall $(\varepsilon, +\infty)$ des unteren Ufers des Schnittes.

Auf dem oberen Ufer ist $\log t$ reell. Beim Übergang zum unteren Ufer erhält $\log t$ den Zuwachs $2\pi i$, so dass der Integrand dort folgendermassen lautet:

$$e^{(z-1)2\pi i} e^{-t + (z-1) \log t}$$

wobei $\log t$ nach wie vor reell ist. Somit gilt also für (23)

$$\int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_{+\infty}^{\varepsilon} e^{-t} t^{z-1} dt + e^{(z-1)2\pi i} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{\lambda_{\varepsilon}} e^{-t} t^{z-1} dt; \quad (25)$$

dabei ist $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $\varepsilon > 0$ geht aber das Integral über den Kreis λ_ε gegen Null. Auf λ_ε ist nämlich der von z unabhängige Faktor e^{-t} dem Betrage nach beschränkt, und der Faktor t^{z-1} lässt sich wie folgt abschätzen:

$$|t^{z-1}| = e^{(\operatorname{Re} z - 1) \log |t| - \operatorname{Im} z \arg t} = \varepsilon^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-\operatorname{Im} z \arg t}$$

Dieser geht also für $\operatorname{Re} z > 1$ mit $\varepsilon > 0$ gegen Null, oder wird von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon^{1-\operatorname{Re} z}}$ unendlich. Da $\operatorname{Re} z > 0$ und die Länge des Integrationsweges gleich $2\pi\varepsilon$ ist, folgt die Behauptung sofort und (25) reduziert sich im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ auf

$$\int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt = (e^{2\pi i z} - 1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (26)$$

oder nach (9) auf Gl. (24). \square

Die Formel (24) liefert die Darstellung der meromorphen Funktion $\Gamma(z)$ als Quotient zweier ganzer Funktionen. Der Nenner wird für $z \in \mathbb{Z}$ gleich Null. Für $z = 0, -1, -2, \dots$ erhält man die Pole von $\Gamma(z)$. Für $z \in \mathbb{N}$ ist der Integrand in (24), d.h. (22), eine in der ganzen Ebene eindeutige und holomorphe Funktion von t , also eine ganze Funktion. Nach dem Cauchy'schen Satz ist dann ihr Integral längs γ gleich Null, und deshalb ergeben sich für $z \in \mathbb{N}$ keine Pole.

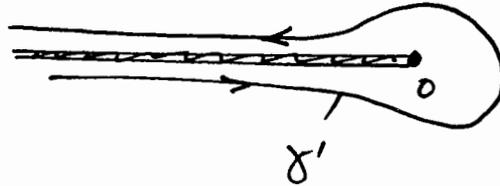
Nun ersetzen wir in (26) z durch $1-z$:

$$\int_{\gamma} e^{-t} t^{-z} dt = (e^{-2\pi i z} - 1) \Gamma(1-z). \quad (27)$$

Führt man die Substitution $t = e^{i\theta} \pi = -\pi$ durch, so ergibt sich für die linke Seite

$$\int_{\gamma} \bar{e}^t t^{-z} dt = - \int_{\gamma'} e^{\pi} (e^{i\pi\tau})^{-z} d\tau = - e^{\pi iz} \int_{\gamma'} e^{\pi} \tau^{-z} d\tau, \quad (28)$$

wobei γ' der folgende Weg ist:



Die τ -Ebene erhält man aus der t -Ebene durch Drehung um den Nullpunkt um den Winkel $-\pi$. Dabei geht der Schnitt längs der positiven reellen Achse in der t -Ebene in den längs der negativen reellen Achse in der τ -Ebene über, wobei das untere Ufer des neuen Schnittes dem oberen des ursprünglichen entspricht. Auf dem unteren Ufer des neuen Schnittes müssen wir also $\arg e^{i\pi\tau} = 0$ annehmen, d.h., es ist $\arg \tau = -\pi$. Aus (28) und (27) ergibt sich

$$\int_{\gamma'} e^{\pi} t^{-z} d\tau = \underbrace{(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})}_{2i \sin \pi z} \Gamma(1-z)$$

oder nach (14)

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} e^{\pi} \tau^{-z} d\tau.} \quad (29)$$

Diese Hankel-Darstellung werden wir im nächsten Abschnitt behandeln.

5. Die konfluente hypergeometrische Funktion

Bei vielen Problemen der Wellenmechanik (H-Atom, etc.) und anderen Gleichungen der mathematischen Physik stößt man auf die konfluente hypergeometrische Funktion. Diese wollen wir hier näher untersuchen. Wie bei der Γ -Funktion werden wir auch hier sehr schön sehen, wie komplex analytische Methoden zum Tragen kommen.

Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen sind definitionsgemäss die Lösungen der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$\boxed{Lw := z \frac{d^2 w}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{dw}{dz} - \alpha w = 0.} \quad (1)$$

Darin variieren die unabhängige Variable z und die Parameter α, γ in \mathbb{C} .

Zur Auffindung von Lösungen sehen wir eine Potenzreihe an

$$w(z) = z^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_0 \neq 0. \quad (2)$$

Durch einsetzen in (1) ergibt sich

$$Lw = [s(s-1) + s\gamma] a_0 z^{s-1} + z^s \sum_{k=0}^{\infty} [(\gamma + k + s)(k + s + 1) a_{k+1} - (k + s + \alpha) a_k] z^k = 0. \quad (3)$$

Dies gibt

$$s(s-1) + \gamma s = 0$$

und die Rekursionsformel

$$a_{k+1} = \frac{k+s+\alpha}{(k+s+\gamma)(k+s+1)} a_k. \quad (4)$$

Für s erhalten wir $s=0$ oder $s=1-\gamma$.

Im Falle $s=0$ ergibt sich (für $a_0=1$) die Konfluente hypergeometrische Reihe:

$$F(\alpha, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} z^k. \quad (5)$$

Dabei haben wir folgende Abkürzungen verwendet:

$$(x)_k := x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Die Koeffizienten der Reihe (5) sind wohldefiniert für $-\gamma \notin \mathbb{N}_0$ und ^{diese} stellt eine ganze Funktion dar. Für $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ bricht die Reihe ab und wir erhalten ein Polynom in z vom Grade $|\alpha|$.

Nun betrachten wir die Lösung mit $s=1-\gamma$. Wir setzen $w = z^{1-\gamma} v$ und erhalten

$$Lw = z^{1-\gamma} [z v'' + (2-\gamma-z) v' - (1+\alpha-\gamma) v] = 0.$$

Für v gilt also

$$z v'' + (2-\gamma-z) v' - (1+\alpha-\gamma) v = 0.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit (1) zeigt, dass $v(z) = F(\alpha', \gamma'; z)$ mit $\alpha' = 1+\alpha-\gamma$, $\gamma' = 1-\gamma$.

Zusammenfassend sind die folgenden Funktionen

$$F(\alpha, \gamma; z) \quad , \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$$

und

$$z^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma; z) \quad , \quad \gamma \neq 2, 3, 4, \dots \quad (7)$$

Lösungen von (1). Für $\gamma=1$ fallen diese beiden Lösungen zusammen. Ausserdem sind sie linear unabhängig, denn für $\gamma \notin \mathbb{Z}$ ist $z^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma; z)$ eine mehrdeutige Funktion.

Die allgemeine Lösung von (1) ist eine Linearkombination von zwei linear unabhängigen Lösungen.

Integraldarstellung

Wir lösen nun (1) mit einer anderen Methode. Dazu versuchen wir eine Integraldarstellung der Form

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{tz} f(t) dt, \quad (8)$$

mit einem noch zu bestimmenden Weg γ . Für die unbekannte Funktion $f(t)$ erhalten wir wegen

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{tz} t^k f(t) dt$$

die Bedingung

$$\int_{\gamma} e^{tz} [zt^2 + (\gamma-z)t - \alpha] f(t) dt = 0.$$

Mit $ze^{tz} = \frac{d}{dt} e^{tz}$ und partieller Integration wird daraus

$$\int_{\gamma} \frac{d}{dt} [e^{tz} t(t-1) f(t)] dt + \int_{\gamma} e^{tz} \left[-\frac{d}{dt} [t(t-1) f(t)] + \gamma t f(t) - \alpha f(t) \right] dt = 0.$$

Dies ist sicher erfüllt falls

$$\int_{\gamma} \frac{d}{dt} [e^{tz} t(t-1) f(t)] dt = 0$$

und

$$-\frac{d}{dt} [t(t-1) f(t)] + (\gamma t - \alpha) f(t) = 0.$$

Die letzte Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{f'}{f} = \frac{(\gamma-2)t+1-\alpha}{t(t-1)} = \frac{\alpha-1}{t} + \frac{\gamma-\alpha-1}{t-1}.$$

Ein partikuläres Integral davon ist

$$f(t) = t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Falls also

$$\int_{\gamma} \frac{d}{dt} [e^{tz} t^{\alpha} (t-1)^{\gamma-\alpha}] dt = 0, \quad (9)$$

so ist

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1} dt \quad (10)$$

eine Lösung von (1).

Wie oben ist dann auch

$$w(z) = z^{1-\gamma} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha} dt \quad (11)$$

eine Lösung von (1), wobei der Weg C' die folgende Bedingung erfüllen muss:

$$\int_{C'} \frac{d}{dt} [e^{tz} t^{\alpha-\gamma+1} (t-1)^{-\alpha+1}] dt = 0. \quad (12)$$

Gl. (11) kann man wie folgt schreiben

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{tz} (tz)^{\alpha-\delta} (tz-z)^{-\alpha} z dt$$

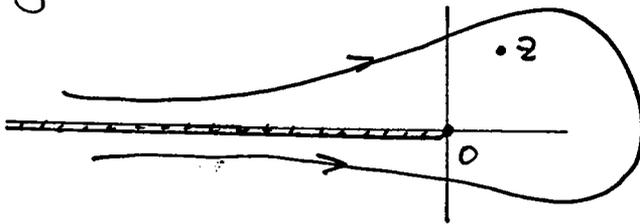
oder (mit der Substitution $tz = \tau$)

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\tau} \tau^{\alpha-\delta} (\tau-z)^{-\alpha} d\tau. \quad (13)$$

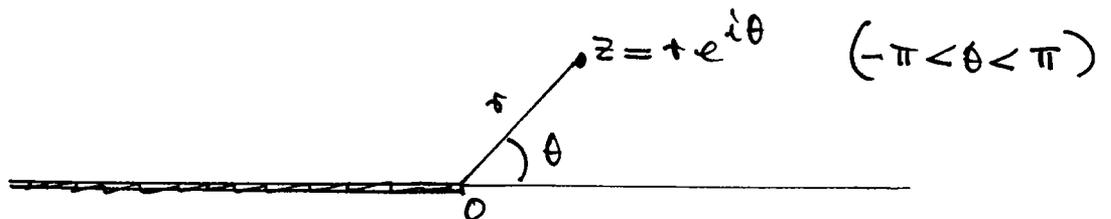
Dabei lautet die Bedingung an den Weg C

$$\int_C \frac{d}{d\tau} [e^{\tau} \tau^{\alpha-\delta+1} (\tau-z)^{-\alpha+1}] d\tau = 0.$$

Letztere ist erfüllt, wenn wir C wie in der folgenden Figur wählen:



C umläuft also die beiden Punkte 0 und z und erstreckt sich ins Unendliche beidseitig der negativen reellen Achse. Der Integrand von (13) hat im Gebiet, das von C umschlossen wird, bei $\tau = 0$ einen Verzweigungspunkt. Wir legen längs der negativen reellen Achse einen Verzweigungsschnitt und definieren τ^a , wie üblich, mit dem Hauptast des Logarithmus:



$$\log z := \log r + i\theta.$$

Nun beweisen wir, dass $w(z)$ in (13) mit $F(\alpha, \gamma; z)$ folgendermassen zusammenhängt

$$F(\alpha, \gamma; z) = \Gamma(\gamma) w(z) \quad , \quad (14)$$

d.h., es gilt

$$F(\alpha, \gamma; z) = \Gamma(\gamma) \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\tau} \tau^{\alpha-\gamma} (\tau-z)^{-\alpha} d\tau. \quad (15)$$

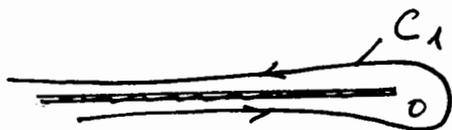
Um dies zu zeigen, wählen wir die Schleife um z so gross, dass $|z/\tau| \leq \rho < 1$ für alle $\tau \in C$. Dann gilt längs C die Entwicklung

$$(\tau-z)^{-\alpha} = \tau^{-\alpha} \left(1 - \frac{z}{\tau}\right)^{-\alpha} = \tau^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \left(-\frac{z}{\tau}\right)^n.$$

Dies setzen wir rechts in (15) ein und erhalten (nach Vertauschung von Summation und Integration)

$$F(\alpha, \gamma; z) = \Gamma(\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-z)^n \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\tau} \tau^{-\gamma-n} d\tau.$$

Hier können wir C in C_1



deformieren. Mit Hilfe von (4.29) ergibt sich

$$F(\alpha, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \binom{-\alpha}{n} (-z)^n.$$

Nun wenden wir wiederholt (4.13) an:

$$\Gamma(\gamma+n) = (\gamma)_n \Gamma(\gamma)$$

und bemerken

$$\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n \frac{(\alpha)_n}{n!}.$$

Dies gibt schliesslich

$$F(\alpha, \gamma; z) = \sum \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{1}{n!} z^n,$$

was mit (5) übereinstimmt, q.e.d.

Asymptotik

Das asymptotische Verhalten von F ist z.B. sehr wichtig bei der Herleitung des diskreten Spektrums des H-Atoms (NS, Skript QM I, §1.5).

Ausgangspunkt der Diskussion ist die Integraldarstellung (15). Für grosse $|z|$ leiten wir unten das folgende Resultat her:

$$F(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\alpha-\gamma+1)_n}{n!} (-z)^{-n} + O(|z|^{-N+1}) \right] \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n (1-\alpha)_n}{n!} z^{-n} + O(|z|^{-N+1}) \right]. \quad (16)$$

Speziell für $N=1$ kommt

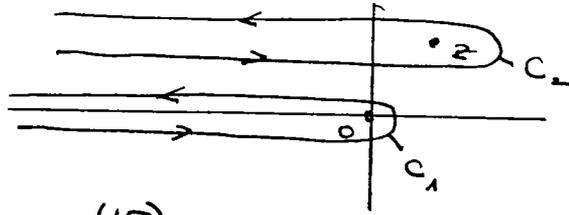
$$F(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right] \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \left[1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right]. \quad (17)$$

Darf z.B. der exponentiell anwachsende Term aus physikalischen Gründen nicht vorkommen, so muss $-\alpha \in \mathbb{N}_0$ sein.

Die nachfolgenden Seiten sind aus meinem QM I Skript entnommen.

Asymptotik

Zur Diskussion des asymptotischen Verhaltens von F spalten wir den Weg C in zwei Wege C_1 und C_2 auf:



und setzen (siehe ⁽¹⁵⁾ (A.2.19))

$$\Phi_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_{C_2} e^{\pi} \tau^{\alpha-\gamma} (\pi-z)^{-\alpha} d\tau. \quad (\text{A.2.20})$$

Natürlich ist

$$F(\alpha, \gamma, z) = \Phi_1(\alpha, \gamma, z) + \Phi_2(\alpha, \gamma, z). \quad (\text{A.2.21})$$

Für $s=z$ führen wir die Substitution $\tau' = \tau - z$ aus und finden

$$\Phi_2(\alpha, \gamma, z) = e^z \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_{C_1} e^{\tau'} \tau'^{-\alpha} (\tau'+z)^{\alpha-\gamma} d\tau'.$$

Dies zeigt

$$\Phi_2(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi_1(\gamma-\alpha, \gamma, -z). \quad (\text{A.2.22})$$

Φ_1 und Φ_2 sind im allgemeinen mehrdeutige Funktionen von z .

Nun machen wir eine heuristische Bemerkung. Eine strenge Betrachtung wird abschliessend folgen.

Wir entwickeln

$$(\pi-z)^{-\alpha} = (-z)^{-\alpha} \left(1 - \frac{\pi}{z}\right)^{-\alpha} = (-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \left(-\frac{\pi}{z}\right)^n$$

und setzen dies in (A.2.20) ein für $s=1$ (obwohl die

obige Reihe nur auf einem kleinen Stück von C_1 konvergiert!), Ebenso umgekehrt vertauschen wir Integrieren und Summieren und erhalten mit (A.2.14)

$$\begin{aligned} \Phi_1(\alpha, \gamma, z) & \stackrel{''}{=} \Gamma(\gamma) (-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{\pi} \pi^{\alpha-\gamma} \left(-\frac{\pi}{z}\right)^n d\pi \quad (4.29) \\ & = \Gamma(\gamma) (-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha-n)} (-z)^{-n} \end{aligned}$$

Aber nach (A.2.16) ist

$$\Gamma(\gamma-\alpha) = \Gamma(\gamma-\alpha-n) (\gamma-\alpha-n) (\gamma-\alpha-n+1) \dots (\gamma-\alpha-1).$$

ferner gilt $\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n \frac{(\alpha)_n}{n!}$.

Also ist

$$\Phi_1(\alpha, \gamma, z) \stackrel{''}{=} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\alpha-\gamma+1)_n}{n!} (-z)^{-n} \quad (A.2.23)$$

Dies ist eine Entwicklung nach negativen Potenzen von z . Wir können bestenfalls hoffen, dass die rechte Seite von (A.2.23) das asymptotische Verhalten von Φ_1 in einem noch zu spezifizierenden Sinne beschreibt. Dies wollen wir nun diskutieren.

Wir setzen für $u \in \mathbb{C}$:

$$(1-u)^{-\alpha} =: \sum_{n=0}^N \binom{-\alpha}{n} (-u)^n + r_N(u). \quad (A.2.24)$$

Aus

$$r_N(u)(1-u)^\alpha = 1 - (1-u)^\alpha \sum_{n=0}^N \binom{-\alpha}{n} (-u)^n,$$

ergibt sich durch Ableiten nach u

$$\frac{d}{du} [t_N(u) (1-u)^\alpha] = \frac{(\alpha)_{N+1}}{N!} u^N (1-u)^{\alpha-1}.$$

Damit folgt (da $t_N(0) = 0$)

$$t_N(u) = \frac{(\alpha)_{N+1}}{N!} (1-u)^{-\alpha} \int_0^u v^N (1-v)^{\alpha-1} dv. \quad (\text{A.2.25})$$

Dabei muss man über einen Weg von $v=0$ bis $v=u$ integrieren der nicht durch $v=1$ geht.

Benutzen wir (A.2.24) in der Definition von Φ_1 , so folgt wie oben

$$\Phi_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{(\alpha)_n (\alpha-\gamma+1)_n}{n!} (-z)^{-n} + R_N(\alpha, \gamma, z) \right\}, \quad (\text{A.2.26})$$

wobei

$$R_N(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^\pi \pi^{\alpha-\gamma} t_N(\pi/z) d\pi. \quad (\text{A.2.27})$$

Dieses Restglied schätzen wir ab. Da (siehe (A.2.24))

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^{-N-1} t_N(u) = (-1)^N \binom{-\alpha}{N+1},$$

verhält sich $t_N(u)$ wie u^{N+1} für $u \rightarrow 0$. Deshalb wir deshalb $\text{Re}(\alpha-\gamma+N) > -1$, so können wir in (A.2.27) den Weg C_1 auf die beiden Ufer längs der negativen reellen Achse zusammenziehen. Dies gibt

$$R_N(\alpha, \gamma, z) = (1 - e^{-2\pi i(\alpha-\gamma)}) \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} e^\pi \pi^{\alpha-\gamma} t_N(\pi/z) d\pi. \quad (\text{A.2.28})$$

Dabei ist nach (A.2.25)

$$t_N(\pi/z) = \frac{(\alpha)_{N+1}}{N!} (1 - \pi/z)^{-\alpha} \int_0^{\pi/z} v^N (1-v)^{\alpha-1} dv. \quad (\text{A.2.29})$$

-61!

Wir zeigen nun, dass

$$|R_N(\alpha, \gamma, z)| \leq \frac{A_N}{|z|^{N+1}}, \quad (\text{A.2.30})$$

wobei A_N noch von $\arg z$, aber nicht von $|z|$ abhängt.
 Dazu beweisen wir weiter unten die folgende Ungleichung:

Sei $\rho \geq 0$; $\beta, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$|(1 - \rho e^{i\beta})^{\lambda_1 + i\lambda_2}| \leq \left(\frac{1 + \rho}{|\sin \beta|} \right)^{|\lambda_1|} e^{\pi |\lambda_2|}. \quad (\text{A.2.31})$$

Damit folgt aus (A.2.29) für $|z| > 1$

$$\begin{aligned} |r_N(\pi/z)| &\leq \text{const} |(1 - \pi/z)^{-\alpha}| \left| \int_0^{\pi/z} v^N (1-v)^{\alpha-1} dv \right| \\ &\leq \text{const} \cdot (1 + |\pi/z|)^{|\alpha|} \int_0^{|\pi/z|} v^N \underbrace{|(1-v)^{\alpha-1}|}_{\leq \text{const} |1+v|^{|\alpha|}} dv \\ &\leq \text{const} (1 + |\pi|)^{|\alpha|} |\pi/z|^{N+1} \int_0^1 u^N (1 + |\pi|)^{|\alpha|} du \\ &\leq \text{const} \frac{1}{|z|^{N+1}} (1 + |\pi|)^{2|\alpha|} |\pi|^{N+1}. \end{aligned}$$

Deshalb gilt (A.2.30), q.e.d.

Wir beweisen noch (A.2.31):

Setzen $1 - \rho e^{i\beta} = \rho_1 e^{i\beta_1}$, $\rho_1 \geq 0$, $|\beta_1| \leq \pi$.

Dann ist

$$\rho_1 = |1 - \rho e^{i\beta}| \leq 1 + \rho$$

und

$$\begin{aligned} \rho_1^2 - \sin^2 \beta &= (1 + \rho e^{i\beta})(1 + \rho e^{-i\beta}) - \sin^2 \beta \\ &= (\rho + \cos \beta)^2 \geq 0 \implies \underline{\rho_1 \geq |\sin \beta|}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} |(1 - \rho e^{i\beta})^{\lambda_1 + i\lambda_2}| &= |(\rho_1 e^{i\beta_1})^{\lambda_1 + i\lambda_2}| \\ &= \rho_1^{\lambda_1} e^{-\beta_1 \lambda_2} \end{aligned}$$

Aber $\rho_1^{\lambda_1} \leq \left(\frac{1+\rho}{|\sin\beta|}\right)^{|\lambda_1|}$, $e^{-\beta_1 \lambda_2} \leq e^{\pi|\lambda_2|}$.

Daraus folgt die Behauptung.

Aus (A.2.26) und (A.2.30) folgt jetzt für $|z| > 1$:

$$\Phi_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[\sum_{n=0}^N \frac{(\alpha)_n (\alpha-\gamma+1)_n}{n!} (-z)^{-n} + O(|z|^{-N-1}) \right]. \quad (\text{A.2.32})$$

Damit und mit (A.2.22) folgt für $|z| > 1$ auch:

$$\Phi_2(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \left[\sum_{n=0}^N \frac{(\gamma-\alpha)_n (1-\alpha)_n}{n!} z^{-n} + O(|z|^{-N-1}) \right]. \quad (\text{A.2.33})$$

Mit (A.2.21) erhalten wir daraus das gewünschte Resultat (welches bei der Herleitung des Wasserstoffspektrums benutzt wurde)

$$\begin{aligned} F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[\sum_{n=0}^M \frac{(\alpha)_n (\alpha-\gamma+1)_n}{n!} (-z)^{-n} + O(|z|^{-M-1}) \right] \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \left[\sum_{n=0}^N \frac{(\gamma-\alpha)_n (1-\alpha)_n}{n!} z^{-n} + O(|z|^{-N-1}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2.34})$$

Speziell für $M=N=1$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right] \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \left[1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2.35})$$

Die Laguerre'schen Polynome

Die Laguerre'schen Polynome sind durch folgende Gleichung definiert

$$L_k^u(z) = \frac{(-1)^u (k!)^2}{u! (k-u)!} F(u-k, u+1, z); \quad k, u \in \mathbb{N}_0, u \leq k. \quad (\text{A.2.36})$$

Dies ist ein Polynom vom Grade $k-u$. Mit der Integraldarstellung (A.2.19) können wir diesen Ausdruck umformen. Da u, k ganz sind kann man den Weg C auf einen Kreis um $\tau = 0$ zusammenziehen (der Schnitt fällt weg):

$$F(u-k, u+1, z) = u! \frac{1}{2\pi i} \oint e^\tau \frac{(\tau-z)^{k-u}}{\tau^{k+1}} d\tau. \quad (\text{A.2.37})$$

Bemerken wir hier

$$(\tau-z)^{k-u} = (-1)^u \frac{(k-u)!}{k!} \left(\frac{d}{dz}\right)^u (\tau-z)^k,$$

so kommt

$$F(u-k, u+1, z) = (-1)^u \frac{u! (k-u)!}{k!} \left(\frac{d}{dz}\right)^u \frac{1}{2\pi i} \oint e^\tau \frac{(\tau-z)^k}{\tau^{k+1}} d\tau.$$

Der Satz von Cauchy gibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint e^\tau \frac{(\tau-z)^k}{\tau^{k+1}} d\tau &= \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^k \Big|_{\tau=0} \underbrace{[e^\tau (\tau-z)^k]}_{e^z e^{\tau-z} (\tau-z)^k} \\ &= \frac{1}{k!} e^z \left(\frac{d}{dz}\right)^k (e^{-z} z^k). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$L_k^u(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^u L_k(z), \quad (\text{A.2.38})$$

wobei

$$L_k(z) \equiv L_k^0(z) = e^z \left(\frac{d}{dz} \right)^k (z^k e^{-z}). \quad (\text{A.2.39})$$

Nun bestimmen wir die erzeugende Funktionen der Laguerre Polynome L_k :

$$\Phi(z, t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k F(-k, 1, z). \quad (\text{A.2.40})$$

Nach (A.2.38) haben wir die Integraldarstellung

$$F(-k, 1, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\tau} (\pi - z)^k}{\pi^{k+1}} d\tau.$$

Folglich

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\tau}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{t(\pi - z)}{\pi} \right]^k d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\tau}}{\pi - t(\pi - z)} d\tau = \frac{e^{-tz/1-t}}{1-t}, \end{aligned}$$

d.h.
$$\Phi(z, t) = \frac{e^{-tz/1-t}}{1-t}. \quad (\text{A.2.41})$$

Daraus erhalten wir mit (A.2.38) leicht die erzeugende Funktionen für die L_k^u :

$$\Phi_u(z, t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} L_k^u(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^u \Phi(z, t);$$

\Rightarrow

$$\Phi_u(z, t) = \left(\frac{-t}{1-t} \right)^u \frac{e^{-tz/1-t}}{1-t}. \quad (\text{A.2.42})$$

Anwendung: An verschiedenen Stellen benötigen wir Integrale der Form

$$N_{k,l}^u(\sigma) := \frac{1}{k! l!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{u+\sigma} L_k^u(x) L_l^u(x) dx. \quad (\text{A.2.43})$$

Nun findet man für den entsprechenden Ausdruck mit $L_k^u, L_l^u \rightarrow \Phi_u$ völlig elementar

$$f^u(\sigma; s, t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{u+\sigma} \Phi_u(x, s) \Phi_u(x, t) dx$$

$$= \Gamma(u+\sigma+1) \frac{(st)^u [(1-s)(1-t)]^\sigma}{(1-st)^{u+\sigma+1}}. \quad (\text{A.2.44})$$

Andererseits ist natürlich

$$f^u(\sigma; s, t) = \sum_{k, l=0}^{\infty} N_{k, l}^u(\sigma) s^k t^l. \quad (\text{A.2.45})$$

Die $N_{k, l}^u(\sigma)$ erhält man deshalb aus (A.2.44), indem man in einer Potenzreihenentwicklung den richtigen Term herausfindet (Methode von Schrödinger).

Beispiel:

$$N_{k, k}^u(1) = \frac{1}{(k!)^2} \int_0^\infty e^{-x} x^{u+1} L_k^u(x) L_k^u(x) dx$$

ist der Koeffizient von $(st)^k$ in

$$\Gamma(u+2) \frac{(st)^u [(1-s)(1-t)]}{(1-st)^{u+2}},$$

d.h.

$$N_{k, k}^u(1) = \frac{k!}{(k-u)!} (2k-u+1). \quad (\text{A.2.46})$$

Orthogonalitätsrelationen

Wir kommen auf die Differentialgleichung (103) für die radialen Wellenfunktionen des H-Atoms (mit $\lambda = l(l+1)$) zurück,

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dX}{dr} + \left\{ \epsilon + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} X = 0. \quad (\text{A.2.47})$$

6. Anwendungen der Funktionentheorie auf die Hydrodynamik ebener Strömungen

Es sei D ein Gebiet in der Ebene und $\underline{u} = (u, v)$ ein inkompressibles und zirkulationsfreies Strömungsfeld. Dies bedeutet, dass das Vektorfeld divergenzfrei und wirbelfrei ist:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (1)$$

$$\partial_y u - \partial_x v = 0. \quad (2)$$

Der zugehörige Fluss beschreibt die Stromlinien der Strömung. Letztere sind Lösungen der Differentialgleichung $u(x, y) dy - v(x, y) dx = 0$.

Die komplexwertige Funktion

$$F(x+iy) = u(x, y) - i v(x, y) \quad (3)$$

nennt man die komplexe Geschwindigkeit. Die Gl. (1), (2) sind gerade die Cauchy-Riemannschen Bedingungen für F und folglich ist F holomorph! Umgekehrt definiert eine holomorphe Funktion F durch $\underline{u} = (\operatorname{Re} F, -\operatorname{Im} F)$ ein divergenzfreies und wirbelfreies Vektorfeld.

Falls F eine Stammfunktion W hat, nennen wir diese das komplexe Potential. (Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet existiert W immer.) Wir

setzen

$$W = \phi + i\psi. \quad (4)$$

Dann ist (3) äquivalent zu

$$\begin{aligned} u &= \partial_x \phi = \partial_y \psi, \\ v &= \partial_y \phi = -\partial_x \psi, \end{aligned} \quad (5)$$

d.h. $\underline{u} = \text{grad } \phi$ — ϕ nennt man deshalb das Geschwindigkeitspotential — und die Stromungsfunktion ψ ist längs den Stromlinien konstant. In der Tat gilt für eine Stromlinie $(x(s), y(s))$, $s = \text{Bogenlänge}$,

$$\frac{d}{ds} \psi(x(s), y(s)) = \underbrace{\partial_x \psi}_{-v} \cdot \underbrace{x'}_u + \underbrace{\partial_y \psi}_u \cdot \underbrace{y'}_v = -uv + vu = 0. \quad (6)$$

Wir besprechen nun ein paar inductive komplexe Potentiale W und die zugehörigen Stromlinien als Niveaulinien von $\text{Im } W$.

1) Parallelströmung: Für eine komplexe Zahl $a = \alpha + i\beta$ sei $W(z) = az$. Dazu gehört $\bar{z} = a$,

$\underline{u} = (\alpha, -\beta)$ und die Stromlinien sind gegeben durch $\beta x + \alpha y = \text{const}$ (Parallelströmung).

2) Staupunktströmung: Es sei $W(z) = z^n$, $n = 2, 3, \dots$. In Polarkoordinaten findet man für die Stromlinien sofort

$$r^n \sin(n\varphi) = \text{const}.$$

W beschreibt also eine Strömung mit $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ als Strömgebiet.

3) Multipolströmung: Nun betrachten wir das komplexe Potential $W(z) = z^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. In Polarkoordinaten $z = r e^{i\varphi}$ ist $W(z) = r^{-n} e^{-in\varphi}$, $F(z) = -n r^{-(n+1)} e^{-i(n+1)\varphi}$ und die Stromlinien sind gegeben durch $r^n = \text{const} \sin(n\varphi)$. Diese beschreiben eine Multipolströmung im Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $n=1$ erhält man speziell die Dipolströmung mit den Stromlinien $r = \text{const} \sin \varphi$.

4) Wirbel- und Strudelströmungen:

(i) Quellen und Senken: Für $W(z) = \ln z$ ist $F(z) = \frac{1}{z}$ und in Polarkoordinaten erhält man für die Stromlinien $\varphi = \text{const}$, d.h. Geraden durch den Nullpunkt. Die Strömung beschreibt eine Quelle in $\{0\}$. Entsprechend gibt $W(z) = -\ln z$ eine Senke

(ii) Wirbel: Nun sei $W(z) = ia \ln z$, $a \in \mathbb{R}$. In Polarkoordinaten $W(z) = ia \ln r - a\varphi$, $F(z) = +ia e^{-i\varphi}$. Die Stromlinien sind also Kreise um den Nullpunkt.

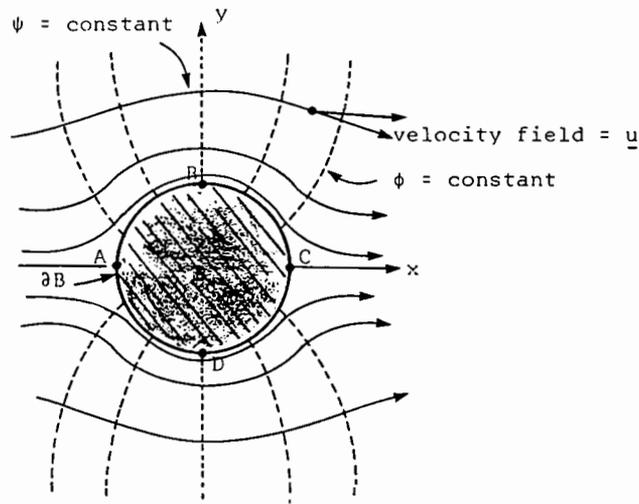
(iii) Strudel: Man kann jetzt Quellen und Senken mit Wirbeln kombinieren: $W(z) = (\alpha + i\beta) \ln z$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Die Stromlinien sind dann $\beta \ln r + \alpha\varphi = \text{const}$, also logarithmische Spiralen: $\ln r = \frac{c}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \varphi$.

5) Profilströmungen: Wir betrachten zunächst die Strömung zu

$$W(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \quad U > 0, a > 0; \quad (7)$$

$$\Rightarrow F(z) = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right). \quad (8)$$

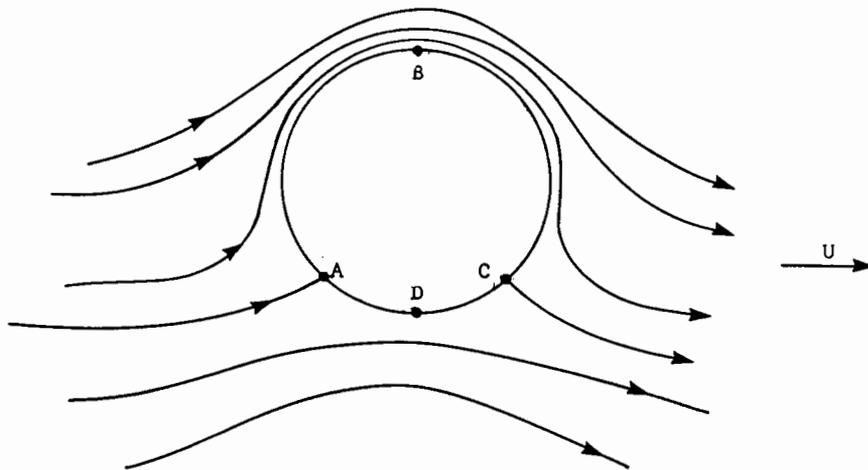
Der Fluss ist tangential an den Kreis $|z|=a$. Tatsächlich ist darauf ψ konstant, da dort $W(z) = U(z + \bar{z})$ und somit reell, d.h. $\psi = 0$ ist. Die Strömung ist in der nachstehenden Figur skizziert.



Eine etwas kompliziertere Überlagerung von bisherigen Beispielen beschreibt

$$W(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z, \quad |z| \geq a. \quad (9)$$

Das Strömungsdiagramm zeigt die folgende Figur:



Kapitel II. Hilbert-Räume

Verallgemeinerung des Begriffs des euklidischen Raumes und seiner geometrischen Struktur. (Dieses Kapitel enthält keine tiefliegenden Ergebnisse.)

§ 1. Hilbert-Räume und ihre Geometrie

Definition 1.1. Sei X ein $\overset{\text{Vektor-}}{K}$ -Raum ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Eine hermitesche Form auf X ist eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow K,$$

so dass für alle $x, x', y \in X, \alpha \in K$ gilt

$$(i) \quad (y, x+x') = (y, x) + (y, x'),$$

$$(ii) \quad (y, \alpha x) = \alpha (y, x),$$

$$(iii) \quad (y, x) = \overline{(x, y)}.$$

Aus diesen Eigenschaften folgt sofort

$$(y+y', x) = (y, x) + (y', x),$$

$$(\alpha y, x) = \overline{\alpha} (y, x),$$

$$(x, x) \text{ ist reell.}$$

Für $K = \mathbb{R}$ ist also eine hermitesche Form eine symmetrische Bilinearform.

(\cdot, \cdot) heißt positiv semi-definit bzw. positiv definit, wenn $(x, x) \geq 0$ bzw. $(x, x) > 0$ für alle $x \in X, x \neq 0$.

Eine positiv definite hermitesche Form heißt auch inneres Produkt oder Skalarprodukt.

Beispiele

1. \mathbb{C}^n , $(x, y) = \sum \bar{x}_i y_i$ ist Skalarprodukt ;
2. $L^2(\Omega, \mu)$, $(f, g) = \int_{\Omega} \bar{f}g d\mu$ ist Skalarprodukt.

Satz 1.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum, (\cdot, \cdot) positiv semi-definierte hermitesche Form auf X . Dann gilt für alle $x, y \in X$

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) (y, y). \quad (1.1)$$

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \bar{\lambda} (y, x) + \lambda (x, y) + \lambda \bar{\lambda} (y, y). \quad (1.2)$$

Ist $(y, y) \neq 0$, so setze man $\lambda = -\frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}$ und erhält

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0,$$

d.h. (1.1). Ist $(x, x) \neq 0$ vertausche man die Rollen von x und y . Ist schließlich $(x, x) = (y, y) = 0$, so setze man $\lambda = -\overline{(x, y)}$ und erhält aus (1.2) $(x, y) = 0$. \square

Satz 1.3. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und (\cdot, \cdot) ein Skalarprodukt auf X . Dann wird durch

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X \quad (1.3)$$

eine Norm definiert, d.h. es gilt

- (i) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis: Die beiden ersten Eigenschaften folgen unmittelbar aus (1.3). Für die Dreiecksungleichung betrachten wir

$$\begin{aligned} (x+y, x+y) &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &\leq (x, x) + |(x, y)| + |(y, x)| + (y, y) \\ &\leq (x, x) + 2 \|x\| \|y\| + (y, y) = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. \square

Mittels der Norm schreibt sich die Cauchy-Schwarzsche Ungl. in der Form

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.4)$$

Definition 1.4. Ein Paar $(X, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem \mathbb{K} -Vektorraum und einer Norm, heißt normierter Raum (über \mathbb{K}).

In einem normierten Raum lässt sich folgende Abstandsfunktion bilden

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (1.5)$$

Die Abstandsfunktion (1.5) eines normierten Raumes ist eine Metriik, d.h. es gilt

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(iii) \quad d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \quad (\text{Dreiecksungl.}).$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften einer Norm.

Dies Paar (X, d) (X als Menge aufgefasst) ist dann ein metrischer Raum. Die Metriik d definiert eine Topologie

für X^*). Sie durch die Metrik definierte Topologie macht X zu einem topologischen Vektorraum im Sinne der folgenden

Definition 1.5. Sei X ein K -Vektorraum und ausserdem ein topologischer Raum. Dann heisst X topologischer K -Vektorraum, wenn Addition und Multiplikation mit Skalaren stetig sind, d.h., die Abbildungen

$$X \times X \longrightarrow X, (x, y) \mapsto x + y;$$

$$K \times X \longrightarrow X, (\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

sind stetig. ($X \times X$ und $K \times X$ sind wieder topologische Räume.)

Wir beweisen die obige Behauptung. Die Addition ist gleichmässig stetig, wie aus der Ungleichung

$$\|(x+y) - (x'+y')\| \leq \|x'-x\| + \|y'-y\|$$

folgt. Die Stetigkeit der Multiplikation folgt aus der Abschätzung

$$\|\alpha'x' - \alpha x\| = \|\alpha'(x'-x) + (\alpha'-\alpha)x\| \leq |\alpha'| \|x'-x\| + |\alpha'-\alpha| \|x\|.$$

Lemma 1.5. Sei X ein K -Vektorraum und $(,)$ ein inneres Produkt. Die Abbildung

*) Zur Erinnerung: Für $x \in X$, $\varepsilon > 0$ heisst

$$U(x, \varepsilon) = \{y \mid y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$$

eine ε -Umgebung von x (offene Kugel). Eine Teilmenge V von X heisst offen, falls es für alle $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U(x, \varepsilon) \subset V$. Die Menge der offenen Mengen von X ist eine Topologie für X , d.h. es gilt:

- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen
- Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen ist off.

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

ist stetig.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x', y')| &= |(x - x', y) + (x', y - y')| \leq |(x - x', y)| + |(x', y - y')| \\ &\leq \|y\| \|x - x'\| + \|x'\| \|y - y'\|. \end{aligned}$$

Definition 1.6. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy Folge (d.h. jede Folge $\{a_n\}$, für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, sodass für alle $n, m > n_0$ gilt $d(a_n, a_m) < \varepsilon$) konvergiert. Ein normierter Raum ist vollständig, wenn er als metrischer Raum aufgefasst, vollständig ist.

Definition 1.7. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banach-Raum.

Bsp.

1. $L^p(\Omega, \mu)$, $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

ist ein Banach-Raum (Riesz-Fischer-Theorem; siehe den Anhang zu Kap. II);

2. $C(\Omega, \mathbb{R})$, Ω kompakt,

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \tag{1.6}$$

ist ein Banach-Raum. (Beweis später)

Definition 1.8. Ein Hilbert-Raum ist ein Paar $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$, bestehend aus einem \mathbb{K} -Vektorraum \mathcal{H} und einem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) auf \mathcal{H} , sodass der zugehörige

normierte Raum $(H, \|\cdot\|)$ vollständig (d.h. ein Banach-Raum) ist.

Verlangt man die Vollständigkeit nicht, so spricht man von einem Prä-Hilbert-Raum.

Beispiele.

1. $L^2(\Omega, \mu)$, $(f, g) = \int_{\Omega} \bar{f} g d\mu$; siehe den Anhang zu Kap. II.

2. l_2 -Raum: Menge der Folgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von komplexen Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$; inneres Produkt

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n \quad (\text{s. Übungen}).$$

Definition 1.9. Zwei Vektoren x und y eines (Prä-) Hilbert-Raumes sind orthogonal falls $(x, y) = 0$ ist. Eine Kollektion $\{x_i\}$ von Vektoren ist eine orthonormierte Menge falls für alle i $(x_i, x_i) = 1$ und $(x_i, x_j) = 0$ für $i \neq j$.

Lemma 1.10 (Satz von Pythagoras). Es seien x und y orthogonale Elemente des Hilbert-Raumes H . Dann gilt

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2. \tag{1.7}$$

Beweis: Trivial.

Übung. Für einen Prä-Hilbert-Raum gilt das Parallelogramm-Gesetz:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{1.8}$$

Definition 1.11. Zwei Hilbert-Räume \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 sind isomorph falls ein linearer Operator U von \mathcal{H}_1 auf \mathcal{H}_2 existiert, so dass

$$(Ux, Uy)_{\mathcal{H}_2} = (x, y)_{\mathcal{H}_1} \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H}_1.$$

Ein solcher Operator heißt unitär.

Satz 1.12. Zu jedem \mathbb{R} -Hilbert-Raum \mathcal{H} existiert eine Vervollständigung, d.h. ein Hilbert-Raum $\hat{\mathcal{H}}$ und eine unitäre Transformation $U: \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ auf eine dichte Menge von $\hat{\mathcal{H}}$ (d.h. $\overline{U(\mathcal{H})} = \hat{\mathcal{H}}$).

Beweis: Konsultiere ein Buch, z.B. Weidmann, Satz 4.11.

Bsp. $L^2([a, b])$ ist die Vervollständigung von $C[a, b]$, mit Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Unter der direkten Summe $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ von zwei Hilbert-Räumen \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 versteht man die Menge der Paare $\langle x, y \rangle$, $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ mit der natürlichen Vektorraumstruktur und dem Skalarprodukt

$$(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = (x_1, x_2)_{\mathcal{H}_1} + (y_1, y_2)_{\mathcal{H}_2}.$$

$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ist wieder ein Hilbert-Raum.

Sz. Das Lemma von Biesz

Ein abgeschlossener Unterraum M eines Hilbert-Raumes H (mit gegebenem Skalarprodukt) ist wieder ein Hilbert-Raum. Sei $M^\perp = \{x \in H \mid (x, y) = 0 \text{ für alle } y \in M\}$ das orthogonale Komplement von M .

M^\perp ist sicher ein linearer Unterraum von H . Ausserdem ist M^\perp abgeschlossen, da das Skalarprodukt stetig ist (Lemma 1.5). Damit ist auch M^\perp ein Hilbertraum und es ist $M \cap M^\perp = \{0\}$. Wir zeigen im folgenden, dass $H = M + M^\perp = \{x + y \mid x \in M, y \in M^\perp\}$.

Lemma 2.1. Sei H ein Hilbertraum, M ein abgeschlossener Unterraum von H und $x \in H$. Dann existiert in M ein eindeutiges Element z , welches x am nächsten ist.

Beweis: Es sei $d = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Man wähle eine Folge $\{y_n\}$, $y_n \in M$, so dass $\|x - y_n\| \rightarrow d$. Dies ist eine Cauchy-Folge, denn (benutze das Parallelogramm-Gesetz):

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \\ &- \|2x + y_n + y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|x - \underbrace{\frac{1}{2}(y_n + y_m)}_{\in M}\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0. \end{aligned}$$

Da M abgeschlossen ist, konvergiert $\{y_n\}$ gegen ein z in M und es ist $\|x - z\| = d$. Die Eindeutigkeit von z ergibt sich wie folgt. Falls z und z' in M existieren mit $\|x - z\| = \|x - z'\| = d$, dann ist für die Folge

$\{y_n\} = (z, z', z, z', \dots)$ natürlich $\|y_n - x\| = d$ und deshalb ist $\{y_n\}$ nach dem obigen Argument eine Cauchy-Folge, also $z = z'$. \square

Satz 2.2 (Projektionsatz). Es sei \mathcal{H} ein Hilbert-Raum, M ein abgeschlossener Unterraum. Dann kann jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig in der Form $x = z + w$, $z \in M$, $w \in M^\perp$ dargestellt werden.

Beweis: Nach dem obigen Lemma existiert ein eindeutiges $z \in M$, welches x am nächsten ist. Wir setzen $w = x - z$ und haben natürlich $x = z + w$. Nun müssen wir zeigen, dass $w \in M^\perp$ ist. Dazu sei $y \in M$, $t \in \mathbb{R}$. Für $d = \|x - z\|$ gilt

$$d^2 \leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = d^2 - 2t \operatorname{Re}(w, y) + t^2 \|y\|^2.$$

Also ist $-2t \operatorname{Re}(w, y) + t^2 \|y\|^2 \geq 0$ für alle t . Dies verlangt $\operatorname{Re}(w, y) = 0$. Wählen wir statt t imaginäre Zahlen it , so zeigt ein analoges Argument, dass $\operatorname{Im}(w, y) = 0$ ist. Also ist tatsächlich $w \in M^\perp$.

Eindeutigkeit: Sei $x = z + w = z' + w'$, $z, z' \in M$, $w, w' \in M^\perp$, dann ist $z - z' \in M$, $w' - w \in M^\perp$ und folglich

$$z - z' = w' - w \in M \cap M^\perp = \{0\},$$

d.h. $z = z'$, $w = w'$. \square

Bemerkung. Der Projektionsatz liefert einen natürlichen Isomorphismus zwischen $M \oplus M^\perp$ und \mathcal{H} : $\langle z, w \rangle \mapsto z + w$. Wir schreiben deshalb auch $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

Übung. Sei A eine Teilmenge eines Hilbert-Raumes \mathcal{H} , $L(A)$ die ^{abgeschlossene} lineare Spanne. Dann gilt $L(L(A)) = A^{\perp\perp}$.

Definition 2.3. Eine beschränkte lineare Transformation (beschränkter Operator) von einem HR^* \mathcal{H} in einen HR \mathcal{H}' ist eine Abbildung $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, so dass gilt

(i) $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ für alle \dots ;

(ii) Für ein $C \geq 0$ ist $\|Tx\|_{\mathcal{H}'} \leq C \|x\|_{\mathcal{H}}$

für alle $x \in \mathcal{H}$.

Das kleinste C in (ii) ist die Norm von T

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{H}'}$$

Lemma 2.4. Eine lineare Transformation $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.

Beweis: Aus der Beschränktheit folgt natürlich die Stetigkeit. Umkehrung: Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|x\| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < 1$. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\|T\left(\frac{1}{2} \delta \frac{1}{\|x\|} x\right)\| < 1, \text{ also } \frac{1}{2\|x\|} \delta \|Tx\| < 1, \text{ d.h. } \|Tx\| \leq$$

$\frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$. Da diese Abschätzung auch für $x=0$ gilt ist

T beschränkt. \square

Beachte: T ist genau dann stetig, wenn T im Nullpunkt stetig ist.

Die Menge der beschränkten linearen Transformationen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Mit der obigen Norm wird $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ zu einem Banach-Raum (Theorem III.2 in Reed & Simon).

*) oder Banach-Raum.

Definition 2.5. Der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ ist der duale Raum von \mathcal{H} und wird mit \mathcal{H}^* bezeichnet. Die Elemente von \mathcal{H}^* werden stetige lineare Funktionale genannt.

Das folgende Resultat von Riesz und Fréchet ist sehr wichtig.

Satz 2.6 (Lemma von Riesz). Für jedes $T \in \mathcal{H}^*$ existiert ein eindeutiges $y_T \in \mathcal{H}$, so dass $T(x) = (y_T, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Weiter gilt $\|y_T\|_{\mathcal{H}} = \|T\|_{\mathcal{H}^*}$.

Beweis: Es sei $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) = 0\}$. Da T stetig ist, ist \mathcal{N} ein abgeschlossener Unterraum. Für den Spezialfall $\mathcal{N} = \mathcal{H}$ ist $T(x) = 0 = (0, x)$ für alle x . Deshalb dürfen wir annehmen, dass \mathcal{N} ein echter Unterraum von \mathcal{H} ist. Nach dem Projektionssatz 2.2 gibt es dann ein $x_0 \neq 0$ in \mathcal{N}^\perp . Wir setzen $y_T = \frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0$ und zeigen, dass y_T die gewünschten Eigenschaften hat.

Zunächst sei $x \in \mathcal{N}$; dann ist $T(x) = 0 = (y_T, x)$. Als nächstes nehmen wir x proportional zu x_0 , $x = \alpha x_0$. Dann ist

$$T(x) = T(\alpha x_0) = \alpha T(x_0) = \left(\frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0, \alpha x_0 \right) = (y_T, \alpha x_0).$$

Aus dem schon Bewiesenen folgt durch Linearität, dass $T(\cdot)$ und (y_T, \cdot) auf der linearen Spanne von \mathcal{N} und x_0 übereinstimmen. Diese ist aber gleich \mathcal{H} , denn jedes Element $y \in \mathcal{H}$ kann so geschrieben werden

$$y = \left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0 \right) + \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0.$$

Dies beweist $T(x) = (y_T, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. y_T ist natürlich eindeutig.

Um $\|T\|_{\mathcal{H}^*} = \|y_T\|_{\mathcal{H}}$ zu beweisen, beachten wir

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(y_T, x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|y_T\| \|x\| = \|y_T\|$$

und

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T(x)| \geq \left| T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right) \right| = \left(y_T, \frac{y_T}{\|y_T\|} \right) = \|y_T\|.$$

□

Nach der Schwarzschen Ungleichung definiert auch umgekehrt jedes $y \in \mathcal{H}$ ein stetiges lineares Funktional durch $T_y(x) := (y, x)$. Die Abbildung $y \mapsto T_y$ ist also eine Bijektion von \mathcal{H} auf \mathcal{H}^* (\mathcal{H} ist reflexiv).

Korollar 2.7. Die Abbildung $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ erfülle

(i) $\mathfrak{B}(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \mathfrak{B}(x, y) + \beta \mathfrak{B}(x, z)$;

(ii) $\mathfrak{B}(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} \mathfrak{B}(x, z) + \bar{\beta} \mathfrak{B}(y, z)$;

(iii) $|\mathfrak{B}(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|$

für alle $x, y, z \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein eindeutiges beschränkter linearer Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, so dass

$$\mathfrak{B}(x, y) = (Ax, y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H}.$$

Die Norm von A ist gleich der kleinsten Konstanten C in (iii).

Beweis: Für festes x ist $\mathfrak{B}(x, \cdot)$ nach (ii) und (iii) in \mathcal{H}^* . Nach dem Lemma von Riesz existiert deshalb ein eindeutiges $x' \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{B}(x, y) = (x', y)$. Man definiere $Ax = x'$. Es ist leicht zu zeigen*, dass $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ist (Übung).

* * *

* siehe den Beweis von Lemma 6.1 (Kap.)

§3. Orthogonale Basen

Wir treffen zunächst einige Vorbereitungen.

Definition 3.1. Eine Familie $\{x_i\}_{i \in I}$ von Elementen eines Hilbertraumes \mathcal{H} heißt summierbar zu $x \in \mathcal{H}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge J_ε von I gibt, so dass für alle endlichen J mit $I \supset J \supset J_\varepsilon$ gilt:

$$\|x - \sum_{i \in J} x_i\| < \varepsilon.$$

Offenbar ist dann x eindeutig bestimmt. Wir schreiben

$$x = \sum_{i \in I} x_i.$$

Die Definition 3.1 verwenden wir insbesondere, wenn der Hilbertraum der Körper K ist.

Im folgenden seien $J, J_0, J_1, \dots, J_n, J_\varepsilon$ usw. immer endliche Teilmengen der Indexmenge I , ohne dass dies ausdrücklich wiederholt wird.

Lemma 3.2. (i) Eine Familie $\{x_i\}_{i \in I}$ ist genau dann summierbar, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein J_0 gibt, so dass

$$\|\sum_{i \in J} x_i\| < \varepsilon \text{ für alle } J \text{ mit } J \cap J_0 = \emptyset.$$

(ii) $\{x_i\}_{i \in I}$ ist summierbar zu x genau dann, wenn höchstens abzählbar viele $x_i \neq 0$ sind und wenn für jede Abzählung x_1, x_2, \dots dieser x_i gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Beweis: (i) „ \Rightarrow “ Sei $\{x_i\}$ summierbar und $x = \sum x_i$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es J_0 mit

$$\|\sum_{i \in J'} x_i - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } J' \supset J_0.$$

Dann gilt für eine beliebige Menge J mit $J \cap J_0 = \emptyset$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| &= \left\| \sum_{i \in J \cup J_0} x_i - \sum_{i \in J_0} x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i \in J \cup J_0} x_i - x \right\| + \\ &+ \left\| x - \sum_{i \in J_0} x_i \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

" \Leftarrow " Es gibt eine Menge J_n , dass aus $J \cap J_n = \emptyset$ folgt

$$\left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| < \frac{1}{n}.$$

Deswegen ist $\left\{ \sum_{i \in J_1 \cup \dots \cup J_n} x_i \right\}_{n=1,2,\dots}$ eine Cauchy-Folge. Ihr Limes sei x . Offenbar gilt

$$x = \sum_{i \in I} x_i.$$

(ii) Ist $\{x_i\}_{i \in I}$ summierbar und haben die J_n dieselbe Bedeutung wie oben, so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ abzählbar. Sei $i \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Dann gilt $\|x_i\| < 1/n$ für alle n , also $x_i = 0$. Der Rest ist jetzt offensichtlich, ebenso die andere Richtung der Behauptung. \square

Lemma 3.3. Es seien $\{x_i\}_{i \in I}, \{y_i\}_{i \in I}$ summierbare Familien, $\alpha \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{H}$. Dann gilt

$$(i) \quad \alpha \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \alpha x_i;$$

$$(ii) \quad \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} (x_i + y_i);$$

$$(iii) \quad \left(z, \sum_{i \in I} x_i \right) = \sum_{i \in I} (z, x_i).$$

Beweis: (i) und (ii) sind klar. (iii) Sei nach dem letzten Lemma

$$x = \sum_{i \in I} x_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j.$$

Dann ergibt sich der Beweis aus folgender Ungleichung:

$$\left| (z, x) - \sum_{j=1}^n (z, x_j) \right| = \left| (z, \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j) \right| \leq \|z\| \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j \right\| \leq \varepsilon \|z\|$$

für genügend großes n . \square

Lemma 3.4. Sei $\{x_i\}_{i \in I}$ eine Familie paarweise orthogonaler Elemente aus \mathcal{H} . Dann gilt: $\{x_i\}_{i \in I}$ ist summierbar genau dann, wenn $\{\|x_i\|^2\}_{i \in I}$ in dem Hilbert-Raum \mathbb{R} summierbar ist. In diesem Fall gilt ferner:

$$\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2.$$

Beweis: Mit den Bezeichnungen in Lemma 3.2.(i) gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 = \|\sum_{i \in I} x_i\|^2 < \varepsilon^2 \iff \{\|x_i\|^2\}_{i \in I} \text{ summierbar.}$$

Das ist die behauptete Äquivalenz.

Sei $x = \sum_{i \in I} x_i$. Dann ist nach Lemma 3.3

$$\begin{aligned} (x, x) &= (x, \sum_i x_i) = \sum_i (x, x_i) = \sum_i (\sum_j x_j, x_i) \\ &= \sum_i (\sum_j (x_j, x_i)) = \sum_i (x_i, x_i). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 3.5. Sei $\{x_i\}_{i \in I}$ orthonormierte Untermenge des Hilbert-Raumes \mathcal{H} . Dann gilt:

(i) $\sum_{i \in I} |(x_i, x)|^2 \leq \|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$ (Bessel'sche Ungleichung);

(ii) $\sum_{i \in I} |(x_i, x)|^2 = \|x\|^2$ (Parseval'sche Gleichung) genau

dann wenn

$$x = \sum_{i \in I} (x_i, x) x_i.$$

Beweis: Für alle endlichen Untermengen J von I gilt:

$$0 \leq \|x - \sum_{j \in J} (x_j, x) x_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |(x_j, x)|^2.$$

Also existiert $\sum_{i \in I} |(x_i, x)|^2$, und die Besselsche Ungleichung ist erfüllt. (existiert nach (i) und Lemma 8.4)

$$(ii) \quad \left\| x - \sum_{i \in I} (x_i, x) x_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in I} |(x_i, x)|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{i \in I} (x_i, x) x_i \quad \square$$

Ist eine Familie $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ von Hilberträumen \mathcal{H}_i gegeben, so wird ihre direkte Summe $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ definiert als die folgende Teilmenge des cartesischen Produktes der \mathcal{H}_i :

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \{x_i\}_{i \in I} \mid x_i \in \mathcal{H}_i; \sum_{i \in I} \|x_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 < \infty \right\}.$$

Für zwei Elemente dieser Teilmenge, $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$, ist mit $\{\|x_i\|^2\}$, $\{\|y_i\|^2\}$ auch $\{\|x_i\| \|y_i\|\}$ summierbar. Nach der Schwarzschen Ungleichung $|(x_i, y_i)| \leq \|x_i\| \|y_i\|$ ist dann auch $\{(x_i, y_i)\}$ summierbar.

Damit folgt leicht, dass die direkte Summe $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ ein \mathbb{K} -Vektorraum ist. Mit dem inneren Produkt

$$(\{x_i\}, \{y_i\}) = \sum_{i \in I} (x_i, y_i)$$

wird dieser Raum zu einem Hilbert-Raum. Es ist tatsächlich ziemlich klar, dass dieses (\cdot, \cdot) alle Eigenschaften eines Skalarproduktes hat. Haben wir eine Cauchy-Folge in $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$, so ist leicht zu sehen, dass die Folge der i -ten Koordinaten eine Cauchy-Folge in \mathcal{H}_i ist. Diese konvergiert also in \mathcal{H}_i . Die Folge dieser Grenzwerte liegt in $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ und ist Grenzwert der Cauchy-Folge von der wir ausgegangen sind.

Identifiziert man \mathcal{H}_i mit seinem Bild in $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$,
so ist für $\{x_i\} \in \bigoplus_i \mathcal{H}_i$

$$\{x_i\}_{i \in I} = \sum_{i \in I} x_i.$$

Satz 3.6. Sei $\{x_i\}_{i \in I}$ ein orthogonales System von Vektoren aus dem Hilbert-Raum \mathcal{H} . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\{x_i\}_{i \in I}$ ist maximal (oder vollständig), d.h. ist $\{y_i\}$ ein orthogonales System, das alle x_i enthält, so sind $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ als Mengengleich.

(ii) Gilt $x \perp x_i$ für alle i , so folgt $x = 0$.

(iii) Sei $\mathcal{H}_i = \{\alpha x_i \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$. Dann existiert ein isometrischer Isomorphismus

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i.$$

(iv) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$x = \sum_{i \in I} (x_i, x) x_i \quad (\text{Fourier-Entwicklung}).$$

(v) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$(x, y) = \sum_{i \in I} (x, x_i)(x_i, y).$$

(vi) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\|x\|^2 = \sum | (x_i, x) |^2 \quad (\text{Parseval'sche Gleichung}).$$

Beweis: (i) \Rightarrow (ii) Wäre $x \neq 0$ und $x \perp x_i$, so wäre

$$\{x_i\}_{i \in I} \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

orthonormales System, d.h. $\{x_i\}$ wäre nicht maximal.

(ii) \Rightarrow (iii) Die kanonische Abbildung

$$i: \bigoplus \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}, \quad i(x_j) = x_j$$

ist eine lineare Isometrie, die das Skalarprodukt erhält. Wäre i nicht surjektiv, so gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von $i(\bigoplus \mathcal{H}_i)$ ein $x \neq 0$ mit $x \perp i(\bigoplus \mathcal{H}_i)$, also $x \perp x_i$. Dies widerspricht (ii).

(iii) \Rightarrow (iv) Jedes Element $x \in \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ schreibt sich in der Form

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i.$$

Aus $(x_j, \sum \alpha_i x_i) = \alpha_j$ folgt die Fouriers-Entwicklung

$$x = \sum_{i \in I} (x_i, x) x_i.$$

(iv) \Rightarrow (v) Triviale Bedingung;

(v) \Rightarrow (vi) Setze $y = x$;

(vi) \Rightarrow (i) Gäbe es ein x mit $\|x\|=1$ und $x \perp x_i$ für alle i , so wäre nach der Parsevalschen Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum |(x_i, x)|^2 = 0$$

also $x=0$, Widerspruch! \square

Definition 3.7. Ein orthonormiertes System $\{x_i\}_{i \in I}$, das die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt, heißt Hilbert-Basis oder ~~maximales~~ orthonormierte Basis (ONB) von \mathcal{H} .

Aus (iii) folgt, dass \mathcal{H} durch die Erzeugnis der Basis ONB

auf Isomorphie bestimmt ist.

Satz 3.8. Ein Hilbert-Raum besitzt eine orthonormierte Basis.

Beweis: Dieser erfolgt mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Sei \mathcal{M} die Menge aller orthonormierten Systeme. \mathcal{M} ist bezüglich der Inklusion „ \subset “ halbgeordnet (d.h., es gilt $M \subset N$ für alle $M \in \mathcal{M}$; aus $M_1 \subset M_2, M_2 \subset M_3$ folgt $M_1 \subset M_3$; aus $M_1 \subset M_2, M_2 \subset M_1$ folgt $M_1 = M_2$). Ist \mathcal{M} eine total geordnete Teilmenge von \mathcal{M} (d.h., für $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ gilt $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \subset M_1$), so hat \mathcal{M} eine obere Schranke $M \in \mathcal{M}$ (d.h. für jedes $M' \in \mathcal{M}$ gilt $M' \subset M$); als obere Schranke M von \mathcal{M} können wir die Vereinigung aller $N \in \mathcal{M}$ wählen.

Dieses M ist ein orthonormales System: Sind $x_1, x_2 \in M$, so existieren $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ mit $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$; da $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \subset M_1$ gilt, ist $x_1, x_2 \in M_2$ oder $x_1, x_2 \in M_1$, also gilt $x_1 \perp x_2$.

Da M alle $N \in \mathcal{M}$ enthält, ist M obere Schranke von \mathcal{M} . Nach dem Lemma von Zorn folgt hieraus die Existenz von mindestens einem maximalen Element $M_{\max} \in \mathcal{M}$ (d.h., für jedes $M \in \mathcal{M}$ mit $M_{\max} \subset M$ gilt $M_{\max} = M$).

Dieses M_{\max} ist eine ONB (nach (i) von Satz 3.6). \square

Bemerkung. Eine geringfügige Änderung des Beweises zeigt: Ist M_0 ein orthonormiertes System, so gibt es eine ONB M in \mathcal{H} mit $M \supset M_0$.

Definition 3.9. Ein topologischer Raum X heißt separabel, falls eine abzählbare Teilmenge M von X existiert mit $\bar{M} = X$, d.h., M ist dicht in X .

In der Praxis sind die meisten Hilbert-Räume separabel.

Satz 3.10. Ein Hilbert-Raum ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare ONB hat.

Beweis: Der HR \mathcal{H} sei separabel und $\{x_n\}$ sei eine abzählbare dichte Menge. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass alle endlichen Teilmengen von $\{x_n\}$ linear unabhängig sind. (Sonst werfen wir gewisse Elemente weg.) Mit dem Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt*) erhalten wir aus $\{x_n\}$ eine ^{abzählbare} ONB. Ist umgekehrt eine abzählbare ONB gegeben, dann sind ^{die} endlichen Linearkombinationen der Basiselemente mit rationalen Koeffizienten nach Satz 3.6 (iii) dicht in \mathcal{H} , d.h. \mathcal{H} ist separabel. \square

Bemerkung. Aus Satz 3.10 und Satz 3.6 (iii) ist ein separabler HR entweder isomorph zu $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ oder isomorph zu l_2 .

Beispiel. Die Funktionen $\chi_n: t \mapsto e^{int}$ ($n \in \mathbb{Z}$) bilden eine ONB von $L^2([-\pi, \pi])$. (Für einen Beweis siehe Kap. III.)
~~Zieler Buch von Hewitt & Stromberg, Theorem 16.32.)~~

§4. Tensorprodukt von Hilberträumen

In der QM benötigt man das Tensorprodukt für die Beschreibung der Vereinigung von zwei physikalischen Systemen (z.B. Atomen und Elektronen) zu einem Gesamtsystem.

Zunächst definieren wir das algebraische Tensorprodukt von zwei Vektorräumen \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 .

Mit $F(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ bezeichnen wir den Vektorraum der

*) Konsultiere ein Buch, z.B. Hewitt & Stromberg, § 16.22.

formalen Linearkombinationen von Paaren $\langle x, y \rangle$, $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$:

$$F(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j \langle x_j, y_j \rangle \mid c_j \in \mathbb{K}, x_j \in \mathcal{H}_1, y_j \in \mathcal{H}_2, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(F ist also der freie Vektorraum über den Paaren.) Sei \mathcal{N} der Teilraum von F , der von den Elementen der Form

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k \langle x_j, y_k \rangle - 1 \cdot \left\langle \sum_{j=1}^n a_j x_j, \sum_{k=1}^m b_k y_k \right\rangle$$

aufgespannt wird. Der Quotientenraum $F(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$ heißt das algebraische Tensorprodukt von \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 und wird mit $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ bezeichnet. (4.1)

Das cartesische Produkt $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ kann als Teilmenge von F aufgefasst werden, dabei identifiziert man $\langle x, y \rangle \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ mit $1 \cdot \langle x, y \rangle \in F$. Die durch $\langle x, y \rangle$ erzeugte Äquivalenzklasse aus $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ wird mit $x \otimes y$ bezeichnet; diese Elemente heißen einfache Tensoren. Jedes Element von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ist als endliche Linearkombination von einfachen Tensoren darstellbar. Jede Konstruktion ist eine solche Linearkombination einfacher Tensoren genau dann gleich Null, wenn sie endliche Linearkombination von Elementen der Gestalt (s. (4.2))

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k x_j \otimes y_k - \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^m b_k y_k \right)$$

ist. Insbesondere gilt also

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^m b_k y_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j b_k x_j \otimes y_k.$$

(4.3)

Nun nehmen wir an, \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 seien zwei Hilberträume mit Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_1$ und $(\cdot, \cdot)_2$. Wir wollen auch auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

ein Skalarprodukt definieren. Zunächst wird durch die folgende Formel eine Sesquilinearform auf $F(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ definiert:

$$s\left(\sum_{j=1}^u c_j \langle x_j, y_j \rangle, \sum_{k=1}^u c'_k \langle x'_k, y'_k \rangle\right) = \sum_{j=1}^u \sum_{k=1}^u c_j c'_k \cdot (x_j, x'_k)_1 (y_j, y'_k)_2. \quad (4.4)$$

Für beliebige $z \in \mathcal{H}$ und $w \in F(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ist $s(z, w) = s(w, z) = 0$, wie man durch Ausrechnen leicht bestätigt. Deshalb wird durch

$$\left(\sum_{j=1}^u c_j x_j \otimes y_j, \sum_{k=1}^u c'_k x'_k \otimes y'_k\right) = s\left(\sum_{j=1}^u c_j \langle x_j, y_j \rangle, \sum_{k=1}^u c'_k \langle x'_k, y'_k \rangle\right) \quad (4.5)$$

eine Sesquilinearform auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ definiert. Diese ist ein Skalarprodukt. Ist nämlich $z = \sum_{j=1}^u c_j x_j \otimes y_j \neq 0$, so können wir z wie folgt darstellen. Sind $\{e_k\}$ bzw. $\{e'_k\}$ Orthonormalbasen von $L\{x_1, \dots, x_u\}$ bzw. $L\{y_1, \dots, y_u\}$, so ist

$$z = \sum_{k,l} c_{kl} e_k \otimes e'_l, \quad c_{kl} = \sum_j c_j (e_k, x_j) (e'_l, y_j)$$

und somit

$$(z, z) = \sum_{k,l} |c_{kl}|^2 > 0. \quad (4.6)$$

Es ist also $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, (\cdot, \cdot))$ ein Prä-Hilbertraum. Die Vollständigkeit dieses Raumes wird das (vollständige) Tensorprodukt genannt und mit $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ bezeichnet.

Beispiel. Es seien $(\Omega_1, \mu_1), (\Omega_2, \mu_2)$ zwei Maßräume und $\mathcal{H}_i = L^2(\Omega_i, \mu_i), i=1,2$. Dann ist $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ isomorph zu $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$. Dies sieht man so. Zunächst überzeugt man sich leicht davon, dass ein Element $\sum_{j=1}^u c_j \langle f_j, g_j \rangle \in F$ genau dann in \mathcal{H} ist (vgl. (4.2)), wenn die Funktion

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \mapsto \sum c_j f_j(\omega_1) g_j(\omega_2), \quad \omega_i \in \Omega_i$$

fast überall bezüglich des Produktmaßes $\mu_1 \times \mu_2$ verschwindet. Das algebraische Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ besteht also aus gewissen Äquivalenzklassen von bezüglich $\mu_1 \times \mu_2$ quadratisch integrierbaren Funktionen auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ und für $f, g \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ist

$$(f, g) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \overline{f} g \, d(\mu_1 \times \mu_2).$$

Es dürfte klar sein, dass $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ in $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ dicht ist. (Es genügt darauf hinzuweisen, dass $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ die Treppenfunktionen enthält.)

Wichtig ist noch der

Satz 4.1. Sind $\{e_i\}_{i \in I}$ und $\{f_j\}_{j \in J}$ Orthonormalbasen von \mathcal{H}_1 bzw. \mathcal{H}_2 , so ist $\{e_i \otimes f_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Beweis: Übungsaufgabe.

* * *

Vollständigkeit des Raumes $C(X)$.

X : topologischer Raum

$C(X)$: Menge komplexwertige beschränkte Funktionen auf X

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in X \}.$$

folgt, falls X kompakt

Bd. $C(X)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Nichttrivial ist nur die Vollständigkeit. Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge. Dies bedeutet explizit

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} [\sup \{ |f_n(x) - f_m(x)| : x \in X \}] = 0 \tag{1}$$

Für festes $x \in X$ impliziert dies

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$$

und folglich ist $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{C} . Da \mathbb{C} vollständig ist (!) hat diese Folge einen Grenzwert in \mathbb{C} , welchen wir mit $f(x)$ bezeichnen. Wir behaupten, dass $f \in C(X)$ und dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0. \tag{2}$$

Zunächst beweisen wir (2). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $p(\varepsilon)$ so gross gewählt, dass

$$\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } n, m \geq p. \tag{3}$$

Sei $x \in X$ beliebig gewählt und $n(x, \varepsilon)$ so gross, dass $n \geq p$ und

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_u(x)| + |f_u(x) - f(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } u \geq p. \quad (5)
\end{aligned}$$

Die ganze Zahl p ist unabhängig von x und da x in (5) beliebig ist erhalten wir auch

$$\|f_n - f\| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \quad \text{für } n \geq p.$$

Dies beweist (2).

Nun müssen wir noch zeigen, dass $f \in C(X)$ ist.

Wähle n so gross, dass $\|f - f_n\| < 1$. Dann gilt für alle $x \in X$ $|f(x)| < |f_n(x)| + 1$ und folglich existiert $\|f\|$. Um zu zeigen, dass f auch stetig ist, wählen wir irgend einen Punkt $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$. Es sei n so gross, dass $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sei ferner $U(x)$ eine Umgebung von x , so dass

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in U.$$

Dann finden wir für $y \in U$:

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&\leq \|f - f_n\| + |f_n(y) - f_n(x)| + \|f_n - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

womit die Stetigkeit bewiesen ist. \square

III. Orthogonale Polynome, Fourierreihen

0. Beim harmonischen Oszillator und bei den gebundenen Zuständen des H-Atoms sind wir auf reelle orthogonale Polynome gestoßen (Hermite-, Legendre- und Laguerre Polynome). An dieser Stelle wollen wir die orthogonalen Polynome noch etwas eingehender (und allgemeiner) diskutieren. Grundlegend für diese Diskussion ist das elementare Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt. Der Vollständigkeit halber sei dieses hier (in abstrakter Formulierung) kurz wiederholt.

Sei $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ eine Folge von Vektoren in einem (separablen) Hilbertraum \mathcal{H} , mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Jeder Abschnitt $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ bildet ein linear unabhängiges System von Vektoren.
- (ii) Ist w ein Element des Hilbertraumes \mathcal{H} mit der Eigenschaft $(v_k, w) = 0$ für alle k , so ist $w = 0$.

Unter diesen Voraussetzungen bilden die Vektoren

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{v_0}{\|v_0\|} \\ e_1 &= \frac{v_1 - (e_0, v_1)e_0}{\|v_1 - (e_0, v_1)e_0\|} \\ &\vdots \\ e_k &= \frac{v_k - \sum_{l=1}^{k-1} (e_l, v_k)e_l}{\| \dots \dots \dots \|} \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} (verifiziere dies im Detail).

1. Nun sei ρ eine Dichte im Intervall (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Für $x \in (a, b)$ sei $\rho(x) > 0$ und ρ stetig [Wir könnten allgemeiner messbare ρ betrachten.] Ferner existiere ein $\alpha > 0$, sodass

$$e^{\alpha|x|} \rho(x) < C \quad \text{für } x \in (a, b), \quad C < \infty.$$

Wir betrachten die Funktion

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (a, b), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir suchen nun Polynome p_k vom Grade k mit

$$\int_a^b p_k(x) p_\ell(x) \rho(x) dx = \delta_{k\ell}. \quad (4.3.2)$$

Um diese zu konstruieren, betrachten wir die Funktionsfolge

$$\{ \chi \sqrt{\rho}, \chi \sqrt{\rho}, x \chi \sqrt{\rho}, x^2 \chi \sqrt{\rho}, \dots \} \quad (4.3.3)$$

in $L^2(a, b)$. Diese Folge erfüllt offensichtlich die Voraussetzung (i) des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens. Aber auch die Bedingung (ii) ist erfüllt. Zum Beweis verallgemeinern wir die Überlegung in §4 für die Hermite-Polynome (siehe Seite 47).

Sei $f \in L^2(a, b)$ und es sei

$$\int_a^b \bar{f}(x) x^k \sqrt{\rho} dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.3.4)$$

Wir betrachten die Funktion

$$F(z) = \int_a^b e^{-izx} \sqrt{\rho} \bar{f}(x) dx.$$

Diese Funktion ist analytisch für $|\operatorname{Im} z| < \alpha/2$.

Für die k -te Ableitung erhalten wir dort

$$F^{(k)}(z) = (-i)^k \int_a^b e^{-izx} x^k \sqrt{\rho} \bar{f}(x) dx.$$

Nach Voraussetzung ist

$$F^{(k)}(0) = (-i)^k \int_a^b x^k \sqrt{\rho} \bar{f}(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus folgt $F \equiv 0$. Für reelle z gilt dies

$$0 = F(st+i0) = \int_a^b e^{-isx} \bar{f}(x) \sqrt{\rho} dx.$$

Dies ist nur möglich für $f = 0$, fast überall.
(Siehe Kap. V, Korollar auf S. V.9.) \square

Für die Folge (A.3.3) können wir also das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden und erhalten dabei eine Orthonormalbasis von $L^2((a,b))$. Die Basiselemente haben die folgende Gestalt

$$e_k = p_k \sqrt{\rho}, \quad (\text{A.3.5})$$

wo p_k ein Polynom k -ten Grades ist, und erfüllen nach Konstruktion (A.3.2). Beachte, dass die k -te Potenz von p_k strikte positiv ist.

Beispiele:

a	b	ρ	Name
$-\infty$	$+\infty$	e^{-x^2}	Hermite
0	∞	e^{-x}	Laguerre
-1	1	1	Legendre

Eigenschaften orthogonaler Polynome

(a) Ist $a = -b$ und $\rho(-x) = \rho(x)$, dann gilt

$$p_k(-x) = (-1)^k p_k(x).$$

Beweis: Sind $\{p_0(x), p_1(x), \dots\}$ orthogonale Polynome zum Gewicht ρ im Intervall (a, b) mit strikte positiven Koeffizienten zur höchsten Potenz, so sind diese eindeutig bestimmt. Mit den gemachten Voraussetzungen erfüllt aber auch die Folge $\{p_0(-x), p_1(-x), \dots\}$ die charakterisierenden Eigenschaften. \square

(b) p_k besitzt in (a, b) genau k einfache Nullstellen.

Beweis: Es seien $a < x_1 < x_2 < \dots < x_h < b$ die sämtlichen ungeraden Nullstellen von p_k in (a, b) . Wir nehmen an, es sei $h < k$. Für das Polynom

$$q_h(x) := \prod_{l=1}^h (x - x_l) \quad (\text{A.3.6})$$

$$\text{gilt} \quad \int_a^b q_h(x) p_k(x) \rho(x) dx = 0, \quad (\text{A.3.7})$$

denn für $h < k$ ist

$$q_h = \sum_{l=1}^h c_l p_l,$$

woraus (A.3.7) auf Grund der Orthogonalitätseigenschaften (A.3.2) folgt. Nach Konstruktion ist aber $q_h \cdot p_k$ entweder nicht negativ (für alle $x \in (a, b)$) oder nicht positiv (und sicher $\neq 0$). Deshalb gilt

$$\int_a^b q_h(x) p_k(x) \rho(x) dx > 0, \text{ bzw. } < 0,$$

im Widerspruch zu (A.3.7). Dies beweist $h = k$. \square

(c) Zwischen zwei Nullstellen von p_{k+1} liegt genau eine Nullstelle von p_k .

Zum Beweis von (c) benötigen wir zwei Hilfsätze.

Lemma 1: Das Polynom

$$q_k(\lambda, x) = p_k(x) + \lambda p_{k-1}(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

hat für alle λ genau k einfache reelle Nullstellen.

Beweis: Die Zahl der reellen Nullstellen eines Polynoms vom Grad k ist entweder k oder $\leq k-2$. Es habe $q_k(\lambda, x)$ die reellen Nullstellen $x_1 < x_2 < \dots < x_h$, $h \leq k-2$. Dann gilt für das Polynom

$$r_h(x) = \prod_{l=1}^h (x - x_l)$$

wie im Beweis von (b)

$$\int_a^b r_h(x) q_k(\lambda, x) \rho(x) dx = 0.$$

Dies ist wieder im Widerspruch zu

$$r_h(x) q_k(\lambda, x) \geq 0 \text{ resp. } \leq 0 \text{ für alle } x \in (a, b).$$

Lemma 2: Es gibt kein $y \in (a, b)$ mit

$$p_k(y) = p_{k-1}(y) = 0.$$

Beweis: Gäbe es ein solches y , so folgt

$$q_k(\lambda, y) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wählen wir speziell $\lambda = \lambda_0 = -p'_k(y)/p'_{k-1}(y)$

[beachte $p'_{k-1}(y) \neq 0$, da die Nullstellen nach (b) einfach sind], dann ist

$$q_k(\lambda_0, y) = 0, \quad q'_k(\lambda_0, y) = 0,$$

d.h. y wäre eine Doppelwurzel von $q_k(\lambda_0, x)$, im Widerspruch zu Lemma 1. \square

Beweis von (c): Wäre (c) falsch, dann gäbe es zwei Nullstellen $a < \alpha < \beta < b \sqrt[2k]{\dots}$, so dass (siehe Lemma 2)

$$p_k(x) \neq 0 \quad \text{für } x \in (\alpha, \beta),$$

$$p_{k-1}(x) \neq 0 \quad \text{für } x \in [\alpha, \beta].$$

Nun besitzt für jedes $x \in [\alpha, \beta]$ das Polynom $q_k(\lambda, x)$ die Nullstelle

$$\lambda_0(x) = - p_k(x) / p_{k-1}(x).$$

Es ist $\lambda_0(\alpha) = \lambda_0(\beta) = 0$ und $\lambda_0(x) \neq 0$ für $x \in (\alpha, \beta)$. Daher hat $\lambda_0(x)$ in (α, β) ein bestimmtes Vorzeichen und besitzt dort ein Extremum an der Stelle $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

In x_0 gilt also $\frac{d\lambda_0}{dx}(x_0) = 0$. Leiten wir aber

$$q_k(\lambda_0(x), x) = p_k(x) + \lambda_0(x) p_{k-1}(x) = 0$$

nach x ab, so finden wir an der Stelle x_0 :

$$p_k'(x_0) + \lambda_0(x_0) p_{k-1}'(x_0) = 0.$$

Dies bedeutet, dass $q_k(\lambda_0(x_0), x)$ in x_0 eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung besitzt, im Widerspruch zu Lemma 1. \square

Anwendung: Die Quantenzahl n beim linearen harmonischen Oszillator ist gleich der Anzahl Nullstellen (Knoten) der Eigenfunktion u_n .

Zu (b) und (c) analoge Aussagen gelten für viele in der Physik auftretenden 1-dimensionalen Probleme.

2. Fourier-Reihen

Es sei T der Einheitskreis in der komplexen Ebene:
 $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Eine Funktion F auf T
können wir wie folgt als periodische Funktion auf \mathbb{R}
auffassen:

$$f(t) := F(e^{it}) \Rightarrow f(t + 2\pi) = f(t). \quad (1)$$

Davon geht natürlich auch die Umkehrung. (Vergleichen
meine diese Aussagen auf den höherdimensionalen
Fall.) Entsprechend verstehen wir unter $L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$,
die Klasse der Lebesgue-messbaren, 2π -periodischen
Funktionen auf \mathbb{R} mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (2)$$

Mit anderen Worten: $L^p(T) = L^p([0, 2\pi])$ mit dem
Lebesgue-Maß auf $[0, 2\pi)$.

Auf $L^2(T)$ bilden die Funktionen

$$\chi_u(t) = e^{iut}, \quad u \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

ein orthonormiertes System:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \chi_u(t) \overline{\chi_v(t)} dt = \delta_{uv}. \quad (4)$$

Satz: Die Familie der Funktionen (3) bildet in $L^2(T)$
ein vollständiges System.

Beweis: Die gemäss (1) zu (3) gehörenden Funktionen sind stetig auf T . Es sei \mathcal{F} die Menge der trigonometrischen Polynome, d.h. der Funktionen der Form

$$e^{ikt} \mapsto \sum_{k=-n}^{+n} \alpha_k e^{ikt}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Davon ist die Teilmenge $\{1, \iota, \bar{\iota}\}$, mit $\iota(z) = z$, $\bar{\iota}(z) = \bar{z}$ eine separierende Familie, d.h. zu zwei Punkten z_1, z_2 gibt es ein f aus dieser Teilmenge mit $f(z_1) \neq f(z_2)$, und erfüllt alle Voraussetzungen des Stone-Weierstrass Theorems in der folgenden

Fassung:

Es sei X ein (nichtleerer) kompakter Hausdorff Raum. Ferner sei \mathcal{F} eine separierende Familie von Funktionen in $C(X)$ (= stetigen Funktionen), welche die Funktion 1 enthält und mit jedem f auch \bar{f} enthält. Dann sind die Polynome von Funktionen aus \mathcal{F} (mit komplexen Koeffizienten) dicht in $C(X)$ bezüglich der Topologie, welche durch die sup-Norm definiert ist.

Folglich gibt es zu jedem $f \in C(T)$ und $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom (5) mit

$$\left| \sum_{k=-n}^{+n} \alpha_k e^{ikt} - f(e^{it}) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi). \quad (6)$$

* Für einen Beweis dieses zentralen Satzes der Analysis, siehe z.B.: Hewitt & Stromberg, loc. cit., §7; oder auch (für eine transparentere Durchführung): J. Nees, W. Tübke, "Grosse Sätze und ihre Beweise der Mathematik", Akademie-Verlag, Berlin (1986) → beidh.

Die trigonometrischen Polynome liegen also gleichmäßig dicht in $C(T)$.

Sei jetzt $\varphi \in L^2([-\pi, \pi])$ und $\varepsilon > 0$. Da $C([-\pi, \pi])$ dicht in $L^2([-\pi, \pi])$ ist, gibt es ein $g \in C([-\pi, \pi])$ mit $\|\varphi - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ändert man schrittweise g auf $[\pi - \delta, \pi)$ für ein passendes $\delta > 0$ geeignet ab, so lässt sich leicht ein $f \in C([-\pi, \pi])$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$ und $\|g - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ finden. Schrittweise wähle man ein $p \in \mathcal{T}$ mit $\|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ ($\|f\|_\infty := \sup_T |f|$). Damit gibt das übliche " $\frac{\varepsilon}{3}$ -Argument"

$$\begin{aligned} \|\varphi - p\|_2 &\leq \|\varphi - g\|_2 + \|g - f\|_2 + \|f - p\|_2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f - p|^2 dt \right)^{1/2} \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{|f - p|^2}_{\leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2} dt \right)^{1/2} < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir also in (3) eine orthonormierte (abzählbare!) Basis von $L^2(T)$. Für diese gilt insbesondere alles was in Satz II.3.6 aufgeführt ist. Die Fourierkoeffizienten von $f \in L^2(T)$ sind definiert durch

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (7)$$

und für diese gilt die Parseval-Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt. \quad (8)$$

Ferner lautet die Umkehrung von (7) :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad (9)$$

(Beachte: die Konvergenz ist im quadratischen Mittel !)

Wir beweisen schliesslich noch das

Riemann-Lebesgue Lemma : Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0. \quad (10)$$

Beweis: Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ sei $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Natürlich ist $g \in L^2(\mathbb{T})$. Nach der Parseval-Gleichung gilt $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|^2 = \|g\|_2^2$. Also gibt es eine positive Zahl p so, dass $|\hat{g}(n)|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|n| \geq p$. Folglich erhalten wir für $|n| \geq p$ die Abschätzung:

$$|\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(n) - \hat{g}(n)| + \underbrace{|\hat{g}(n)|}_{< \varepsilon/2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (f(t) - g(t)) e^{-int} dt \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t) - g(t)| dt = \frac{\varepsilon}{2} + \|f - g\|_1 < \varepsilon. \quad \square$$

Bemerkung: \mathbb{T} ist eine besonders einfache (kompakte) Gruppe und die Funktionen (3) sind nichts anderes als die primitiven Charaktere dieser Gruppe und gleichzeitig auch deren irreduziblen Darstellungen. Dieser Gesichtspunkt lässt sich in fruchtbarer Weise zur "harmonischen Analyse" auf Gruppen (und homogenen Räumen) verallgemeinern. Ein physikalisch wichtiges Beispiel wird in Kap. IV besprochen.

Bemerkungen zur punktweisen Konvergenz

1. Die Fourierreihen für Funktionen in $C(T)$ konvergieren nicht immer punktweise. Man kann tatsächlich folgendes zeigen:

Sei $\{t_j\}$ eine beliebige vorgegebene abzählbare Menge auf T , dann gibt es eine Funktion $f \in C(T)$, derart, dass die Partialsummen

$$s_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{+n} \hat{f}(k) e^{ikt} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

auf den t_j unbeschränkt sind!

$$\sup_n |s_n(f)(t_j)| = \infty \quad \text{für alle } j.$$

Dies bedeutet, dass die Fourierreihe von f auf $\{t_j\}$ divergiert. (Beweis in J. Wloka, Funktionalanalysis und Anwendungen, de Gruyter 1971, p.124.)

2. Für differenzierbare Funktionen ist dies nicht möglich. Es gilt der

Satz: Sei $f \in C^k(T)$, $k \geq 1$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig auf T gegen f .

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass nach (7)

$$\widehat{\frac{d^l f}{dt^l}}(n) = (-in)^l \widehat{f}(n) \quad (l \leq k). \quad (11)$$

Mit dem Riemann-Lebesgue Lemma folgt deshalb

$$\widehat{f}(n) = o(|n|^{-k}) \quad \text{für } |n| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Nun gilt natürlich $\frac{d^k f}{dt^k} \in C(T) \subset L^2(T)$ und deshalb ergibt sich mit (11) aus der Parseval-Gleichung (8)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Damit erhalten wir mit der Ungleichung von Cauchy

$$\sum_{|n| > 0} |\widehat{f}(n)| \leq \left(\sum_{|n| > 0} |\widehat{f}(n)|^2 |n|^{2k} \right)^{1/2}.$$

$$\left(\sum_{|n| > 0} |n|^{-2k} \right)^{1/2} < \infty !$$

Damit konvergiert die Fourierreihe (9) von f absolut. Deshalb bilden die Partialsummen $s_n(f)$ im Banachraum $C(T)$ eine Cauchyfolge. Ist $g \in C(T)$ der zugehörige Grenzwert, so folgt aus der Stetigkeit und Injektivität der Fourier-Transformation \mathbb{F} auf $C(T)$. Letzteres ergibt sich wie folgt.

- III. 18''' -

Zunächst gilt nach (7)

$$|\hat{f}(u)| \leq \|f\|_u.$$

Für $f \rightarrow 0$ in $C(T)$ gehen also die $\hat{f}(u)$ gleichmäßig gegen Null (Stetigkeit). Injektivität: Falls $\hat{f} = 0$ gilt offensichtlich

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) p(t) dt = 0$$

für alle trigonometrischen Polynome p . Da aber die trigonometrischen Polynome in $C(T)$ gleichmäßig dicht liegen folgt auch $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = 0$, d.h. $f = 0$.

folgenden Eigenschaften besitze:

1. \mathcal{A} enthalte alle auf X konstanten Funktionen.

2. Zu je zwei Punkten x, y von X gibt es wenigstens eine zu \mathcal{A} gehörende Funktion, die in x und y voneinander verschiedene Werte annimmt.

Zunächst gilt der folgende

Hilfssatz 1. Besitzt \mathcal{A} die Eigenschaften 1 und 2, so gibt es zu beliebig gewählten, voneinander verschiedenen Punkten x und y von X und zu beliebig gewählten Werten a und b stets wenigstens eine zu \mathcal{A} gehörende Funktion, die in x den Wert a und in y den Wert b annimmt.

Ist nämlich g zu \mathcal{A} gehörende Funktion mit $g(x) = \alpha$, $g(y) = \beta$ und $\alpha \neq \beta$, so nimmt die durch

$$h(x) = a + \frac{b - a}{\beta - \alpha} (g(x) - \alpha)$$

definierte, ebenfalls zu \mathcal{A} gehörende Funktion in x den Wert a und in y den Wert b an.

Hilfssatz 2. Ist \mathcal{A} ein Ring, so auch \mathcal{A}^{\sim} .

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, approximiert man die Elemente von \mathcal{A}^{\sim} durch Elemente aus \mathcal{A} . Dann sind aber Summe, Differenz und Produkt von Elementen von \mathcal{A}^{\sim} durch die Summen, Differenzen bzw. Produkte der approximierenden Elemente selbst approximierbar, so daß also auch Summen, Differenzen und Produkte von zu \mathcal{A}^{\sim} gehörenden Elementen wieder zu \mathcal{A} gehören müssen.

Außerdem hat man noch:

Hilfssatz 3. Besitzt der Unterring \mathcal{A} von $\mathcal{C}(X)$ die Eigenschaften 1 und 2 und gehören g_1 und g_2 zu \mathcal{A}^{\sim} , so gehören auch

$\min(g_1, g_2)$ und $\max(g_1, g_2)$ zu \mathcal{A}^{\sim} .

Um diesen Satz zu beweisen, soll g eine beliebige, zu \mathcal{A}^{\sim} gehörende Funktion sein. Dann ist

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \sqrt{g^2(x)} = \sqrt{\|g\|^2 - (\|g\|^2 - g^2(x))} \\ &= \|g\| \sqrt{1 - \frac{\|g\|^2 - g^2(x)}{\|g\|^2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

wobei

$$0 \leq \frac{\|g\|^2 - g^2(x)}{\|g\|^2} \leq 1 \quad (9)$$

ist. Nun weiß man aus der elementaren Reihenlehre, daß $\sqrt{1 - \xi}$ als Potenzreihe in ξ geschrieben werden kann, die für alle ξ mit $0 \leq \xi \leq 1$ gleichmäßig konvergiert.

Setzt man $\frac{\|g\|^2 - g^2(x)}{\|g\|^2} = \xi$, so ist wegen (9) die sich nach (8) ergebende Potenzreihe für $|g|$ für alle x von X gleichmäßig konvergent. Die Partialsummen dieser Potenzreihe sind Polynome in ξ , also auch in g . Daher gehören die Partialsummen zu \mathcal{A}^{\sim} , da \mathcal{A}^{\sim} nach Hilfssatz 2 ein Ring ist. Da gleichmäßige Konvergenz aber Konvergenz in der durch (7) erzeugten Metrik bedeutet, muß $|g|$ selbst zu \mathcal{A}^{\sim} gehören.

Da man nun aber das Minimum $\min(g_1, g_2)$ bzw. das Maximum $\max(g_1, g_2)$ zweier Funktionen (vgl. Abb. 7) in der Form

$$\min(g_1, g_2) = \frac{1}{2} (g_1 + g_2 - |g_1 - g_2|),$$

$$\max(g_1, g_2) = \frac{1}{2} (g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|)$$

darstellen kann, ist der Hilfssatz 3 bewiesen. Wir bemerken nur noch, daß Hilfssatz 3 auch gilt, wenn man das Maximum bzw. das Minimum endlich vieler zu \mathcal{A} gehörender Funktion bildet.

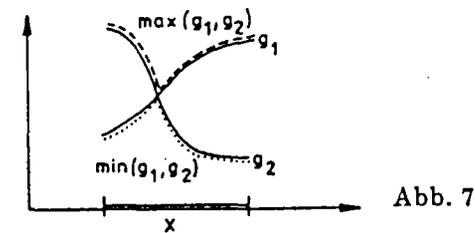


Abb. 7

Wir beweisen nun den folgenden grundlegenden Satz (vgl. P. S. ALEKSANDROW, Einführung in Mengenlehre und allgemeine Topologie, Moskau 1977 (russ.)):

Approximationssatz von WEIERSTRASS und STONE. Sei X ein bikompakter Raum und \mathcal{A} ein die Eigenschaften 1 und 2 besitzender Unterring von $\mathcal{C}(X)$. Dann gilt

$\mathcal{A}^{\sim} = \mathcal{C}(X)$

Um den Satz zu beweisen, sei f in $\mathcal{C}(X)$ beliebig gewählt und $\varepsilon > 0$ eine beliebig vorgegebene positive Zahl. Weiter seien x und y zwei beliebig gewählte Punkte von X . Nach Hilfssatz 1 gibt es dann wenigstens eine Funktion $g_{x,y} \in \mathcal{A}$, die in den Punkten x und y die Werte $f(x)$ bzw. $f(y)$ annimmt. Da $g_{x,y}$ und f stetig

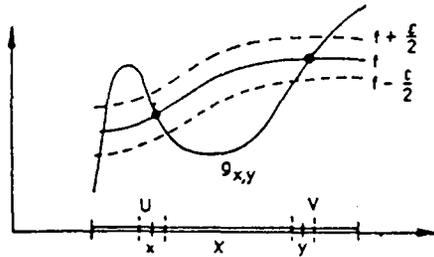


Abb. 8

sind, gibt es eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von y , so daß

$$f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} < g_{x,y}(\xi) < f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

III. 15

für alle ξ aus U und für alle ξ aus V gilt. Geometrisch gedeutet bedeutet letzteres: Die aus \mathcal{A} gewählte Funktion $g_{x,y}$ verbleibt sowohl in der Umgebung U von x als auch in der Umgebung V von y in dem $\frac{\varepsilon}{2}$ -Streifen um f (vgl. Abb. 8). Bei festgehaltenem

Punkt y sei im folgenden zunächst nur x ein beliebig zu wählender Punkt von X . Bei jeder Wahl von x wird die zugehörige Umgebung V von y betrachtet. Variiert x in ganz X , so bilden die zugehörigen Umgebungen U eine offene Überdeckung von X . Wegen der vorausgesetzten Bikompaktheit von X genügen bereits endlich viele derartige Umgebungen U zur vollständigen Überdeckung von X . Es gibt also endlich viele Punkte x_1, \dots, x_k von X , so daß die entsprechenden Umgebungen U_1, \dots, U_k (vgl. Abb. 9) den Raum vollständig überdecken. Die entsprechenden Umgebungen des fest gewählten Punktes y seien V_1, \dots, V_k , so daß jede Funktion $g_{x_i,y}$ die Ungleichung (10) sowohl in U_i als auch in V_i erfüllt. Nun sei g_y das Minimum der endlich vielen Funktionen $g_{x_i,y}$, $i = 1, \dots, k$:

$$g_y = \min (g_{x_1,y}, \dots, g_{x_k,y}).$$

Nach Hilfssatz 3 gehört diese Funktion g_y zu \mathcal{A} . In jedem Punkt ξ von X stimmt g_y also mit einem $g_{x,y}$ überein. Da alle $g_{x,y}$ überall

unterhalb $f + \frac{\varepsilon}{2}$ liegen, gilt auch

$$g_y(\xi) < f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (11)$$

für alle ξ aus X . Andererseits erfüllen alle $g_{x_i,y}$ in einer Umgebung V_i von y sogar die zweiseitige Ungleichung (10). Ist \tilde{V} der Durch-

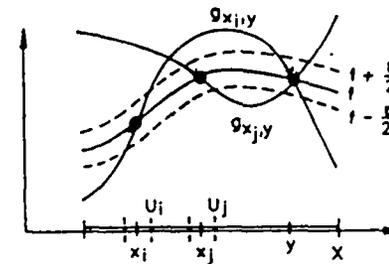


Abb. 9

schnitt der endlich vielen Umgebungen V_1, \dots, V_k , so erfüllt g_y daher in \tilde{V} sogar die zweiseitige Abschätzung (10). Damit ist insgesamt gezeigt: Zu jeder Wahl von y gibt es eine zu \mathcal{A} gehörende Funktion g_y , die in ganz X die Abschätzung (11) erfüllt, während sie in einer Umgebung \tilde{V} von y darüber hinaus der zweiseitigen Abschätzung (10) genügt.

Nun lassen wir schließlich den Punkt y in X variieren: Jeden y ordnen wir die oben konstruierte Funktion g_y und die entsprechende Umgebung \tilde{V} zu. Auch die \tilde{V} bilden eine offene Überdeckung von X , so daß wegen der Bikompaktheit von X ebenfalls wieder endlich viele dieser Umgebungen zur völligen Überdeckung von X genügen. Seien $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_l$ die erforderlichen Umgebungen und y_1, \dots, y_l die zugehörigen Punkte, von denen die Umgebungen zu betrachten sind. Wir definieren $g = \max (g_{y_1}, \dots, g_{y_l})$ jetzt als das Maximum der endlich vielen Funktionen g_{y_1}, \dots, g_{y_l} (vgl. Abb. 10). Da alle g_{y_i} die Ungleichung (11) erfüllen, wird diese Ungleichung auch von g auf ganz X erfüllt. Gehört ξ zu \tilde{V}_i , so gilt nach (10) aber insbesondere auch

$$f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} < g_{y_i}(\xi).$$

Da g das Maximum aller g_{y_i} ist, gilt daher auch in jedem Punkt ξ von X die Ungleichung

$$f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} < g(\xi).$$

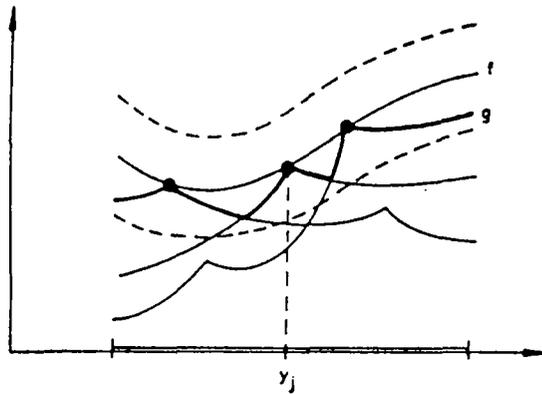


Abb. 10

Insgesamt ist gezeigt, daß die (nach Hilfssatz 3 zu \mathcal{A} gehörende) Funktion g auf ganz X die zweiseitige Abschätzung

$$f(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} < g(\xi) < f(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt. Verwendet man schließlich nochmals die Definition (7) der Metrik, so ist also gezeigt:

Zu jedem f aus $\mathcal{C}(X)$ gibt es ein g aus \mathcal{A} , so daß

$$d(f, g) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Weiter gibt es zu dem konstruierten g aus \mathcal{A} auch ein h aus \mathcal{A} selbst, so daß

$$d(h, g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Damit wird (nach der Dreiecksungleichung)

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(h, g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

so daß zusammenfassend gezeigt ist:

Zu jedem f aus $\mathcal{C}(X)$ gibt es ein h aus \mathcal{A} mit

$$d(f, h) < \varepsilon.$$

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, kann man jedes f also beliebig gut durch Elemente von \mathcal{A} approximieren, so daß die

behauptete Aussage $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$ bewiesen ist.

Die bewiesene Aussage kann man übrigens auch anders formulieren, nämlich so:

Ein Unterring \mathcal{A} von $\mathcal{C}(X)$, der die Eigenschaften 1 und 2 besitzt, liegt dicht¹⁾ in $\mathcal{C}(X)$.

Wir möchten noch darauf hinweisen, daß beim Beweis des Approximationssatzes von WEIERSTRASS und STONE die beiden vorausgesetzten Eigenschaften 1 und 2 nicht unmittelbar angewandt werden. Sie werden jedoch zum Beweis der Hilfssätze gebraucht, auf die der Beweis zurückgreift.

Zum Abschluß sollen zwei Spezialfälle des hergeleiteten Approximationssatzes von WEIERSTRASS und STONE betrachtet werden:

Erstens sei X eine beliebige abgeschlossene und beschränkte Menge des \mathbb{R}^n . Da X bikompakt ist, ist jede auf X definierte stetige Funktion gleichmäßig durch Polynome (in n reellen Variablen) approximierbar.

Zweitens soll ein Approximationssatz für (reellwertige) stetig und n -fach periodische Funktionen in n reellen Variablen x_1, \dots, x_n hergeleitet werden. Eine im ganzen \mathbb{R}^n definierte Funktion f heißt dabei n -fach periodisch, wenn es n von Null verschiedene reelle Zahlen p_1, \dots, p_n so gibt, daß

$$f(x_1 + p_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, x_2 + p_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

⋮

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + p_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

für alle x_1, \dots, x_n gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 2\pi$ ist (sonst wird eine Variablentransformation durchgeführt). Ist i die imaginäre Einheit und bezeichnet man $\exp(ix_j)$ mit z_j , so wird das durch $0 \leq x_j \leq 2\pi$ definierte Intervall auf die durch $|z_j| = 1$ gegebene Kreislinie in der komplexen z_j -Ebene abgebildet. Ist X das in n -dimensionalen komplexen Raum gelegene Produkt dieser n Kreislinien, so können alle stetigen und n -fach periodischen Funktionen

¹⁾ Eine Teilmenge eines metrischen Raumes liegt definitionsgemäß dicht in diesem, wenn jeder Punkt des metrischen Raumes beliebig gut

- IV. 16 -

als eindeutig definierte und stetige Funktionen auf X gedeutet werden (und umgekehrt). Spezielle n -fach periodische Funktionen sind die Konstanten, aber auch die durch $\sin x$; bzw. $\cos x$; definierten Funktionen.

Wenigstens eine der zuletzt genannten Funktionen nimmt in je zwei voneinander verschiedenen Punkten von X voneinander verschiedene Werte an (da zwei Punkte im \mathbb{R}^* nämlich dann voneinander verschiedenen Punkten von X entsprechen, wenn sich nicht alle Koordinaten um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden; unterscheiden sich aber die j -ten Koordinaten x_j und y_j zweier Punkte nicht um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π , so ist der Wert von $\sin x_j$ oder der von $\cos x_j$ von dem entsprechenden Wert $\sin y_j$ bzw. $\cos y_j$ verschieden). Ist daher \mathcal{A} der von den genannten Funktionen erzeugte Ring, so ist \mathcal{A} ein Unterring von $\mathcal{C}(X)$, der die Eigenschaften 1 und 2 besitzt. Durch Anwendung des Satzes von WEIERSTRASS und STONE folgt damit:

1) Jede stetige und n -fach periodische Funktion kann gleichmäßig durch Polynome in $\sin x_j$ und $\cos x_j$, $j = 1, \dots, n$, approximiert werden.

2) Im Spezialfall $n = 1$ folgt: Ist f stetig und periodisch mit der Periode 2π , so kann f gleichmäßig durch Polynome der Form

$$\sum_{\nu=0}^k a_\nu \sin^\nu x \cos^\nu x$$

approximiert werden. Wir bemerken, daß solche Polynome auch in der Form

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^k (a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x)$$

geschrieben werden können.¹⁾

Die in beiden Beispielen betrachteten Polynome haben reelle Koeffizienten. Da reelle Zahlen beliebig gut durch rationale Zahlen approximiert werden können, können die zur Approximation stetiger Funktionen verwendeten Polynome in beiden Fällen durch Polynome mit rationalen Koeffizienten gleichmäßig approximiert werden.

1) Wegen $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist beispielsweise $\sin^2 x = \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$.

niert werden. Andererseits bilden Polynome mit rationalen Koeffizienten eine abzählbare Menge, so daß sich in beiden Fällen auch ergibt: Es gibt je eine abzählbare Menge, die in $\mathcal{C}(X)$ dicht liegt. Metrische Räume, in denen es eine dicht liegende abzählbare Menge gibt, heißen separabel. Daher ergibt sich als Nebenresultat, daß in beiden Beispielen der betrachtete Raum von stetigen Funktionen separabel ist.

7. Auswahlaxiom und Zornsches Lemma¹⁾

In vielen Beweisen der Mathematik²⁾ wird von einer Aussage Gebrauch gemacht, die in der modernen Mengenlehre und in der mathematischen Grundlagenforschung als Auswahlaxiom bezeichnet wird.

Es sei M eine Menge; jedes $A \in M$ sei eine nichtleere Menge.³⁾ Dann besagt das

Auswahlaxiom. Es existiert eine Funktion φ auf M derart, daß für jedes A ihr Wert $\varphi(A)$ ein Element von A ist.

Mit anderen Worten garantiert das Auswahlaxiom die Zuordnung eines Repräsentantensystems zu jeder Menge, die als eine Gesamtheit nichtleerer Mengen gegeben ist.

Um das Zornsche Lemma zu formulieren, erklären wir zunächst die Begriffe Halbordnung, obere Grenze, maximales Element und Kette.

In einer Menge mit den Elementen a, b, \dots ist eine Halbordnung durch eine zweistellige Relation \subseteq gegeben, wenn \subseteq reflexiv, transitiv und identisch ist; d. h., es gilt

1. $a \subseteq a$ (Reflexivität),
2. aus $a \subseteq b$ und $b \subseteq c$ folgt $a \subseteq c$ (Transitivität),
3. aus $a \subseteq b$ und $b \subseteq a$ folgt $a = b$ (Identität).

Man spricht auch von einer „Halbordnung“ anstatt von einer „Menge mit einer Halbordnung“. Die Relation \subseteq kann als vor-

1) Vgl. H. HERMES, Einführung in die Verbandstheorie, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.
 2) Zum Beispiel beim Beweis des Fortsetzungssatzes von HAHN und BANACH, wie in Kapitel 8 gezeigt wird.
 3) Da also die Elemente von M selbst Mengen sein sollen, ist M eine Menge von Mengen.

IV. Krummlinige Koordinaten, Kugelfunktionen

ED - Skript

A. Krummlinige Koordinaten

Es seien $\{x_i\}$ Cartesische Koordinaten des dreidimensionalen Euklidischen Raumes. Durch die Transformation (Diffeomorphismus):

$$x_i = f_i(u_1, u_2, u_3) \quad (i=1,2,3) \quad (A.1)$$

führen wir krummlinige Koordinaten ein. Wir wollen die Differentialoperatoren grad, rot, div und Δ durch die Ableitungen nach den u_i ausdrücken. Dazu betrachten wir den Abstand zwischen zwei "unendlichesimal benachbarten" Punkten:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum dx_i^2 = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial u_j} du_j \right)^2 \\ &= \sum_{j,k} g_{jk}(u) du_j du_k \end{aligned} \quad (A.2)$$

wobei

$$g_{jk} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \quad (A.3)$$

Wir betrachten nun folgenden nun orthogonale Koordinaten:

$$g_{jk} = \delta_{jk} g_k^2, \text{ d.h.}$$

$$ds^2 = \sum_i g_i^2 du_i^2 \quad (A.4)$$

Beispiel: Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) . Für diese ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (A.5)$$

Setzen wir $u_1 = r, u_2 = \vartheta, u_3 = \varphi$, dann ist

$$g_1 = 1, g_2 = r, g_3 = r \sin\vartheta \quad (A.6)$$

In orthogonalen Koordinaten stehen die Kurvenstaten $\underline{f}(u)$,

-IV.2-

mit je zwei Koordinaten festgehalten, senkrecht aufeinander. Das Linienelement in einer der drei Koordinatendirectionen ist

$$ds_1 = g_1 du_1, \quad ds_2 = g_2 du_2, \quad ds_3 = g_3 du_3 \quad (\text{A.7})$$

Die Komponenten des Gradienten einer Funktion φ in diesen drei orthogonalen Richtungen sind also

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{1}{g_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{1}{g_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \frac{1}{g_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \quad (\text{A.8})$$

Es sei \mathcal{D} das infinitesimale Parallelepiped $(\underline{u}, \underline{u} + d\underline{u})$. Aus dem Gauss'schen Satz folgt für die Divergenz eines Vektorfeldes \underline{A} ($|\mathcal{D}| = \text{Volumen von } \mathcal{D}$):

$$\text{div } \underline{A} = \lim_{|\mathcal{D}| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\partial \mathcal{D}} (\underline{A}, \underline{n}) d\sigma \quad (\text{A.9})$$

A_i ($i=1,2,3$) seien die Komponenten von \underline{A} in den drei Koordinatendirectionen u_i .

Nun ist

$$|\mathcal{D}| = g_1 du_1 g_2 du_2 g_3 du_3 = g_1 g_2 g_3 du_1 du_2 du_3$$

und $(\underline{A}, \underline{n}) d\sigma$, z.B. für die Oberfläche $u_1 = \text{const.}$,

$(\underline{A}, \underline{n}) d\sigma = \pm A_1 g_2 g_3 du_2 du_3$. Die Summe dieser Größen für die Deck- und Grundfläche ($u_1 + du_1 = \text{const.}$ bzw. $u_1 = \text{const.}$) ist gleich (beachte die Richtungen von \underline{n}):

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 g_2 g_3) du_1 du_2 du_3$$

Damit erhalten wir aus (A.9):

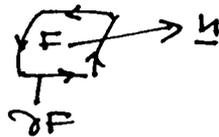
$$\boxed{\text{div } \underline{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 g_3 g_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 g_1 g_2) \right\}} \quad (\text{A.10})$$

Aus (A.8) und (A.10) erhalten wir für den Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten

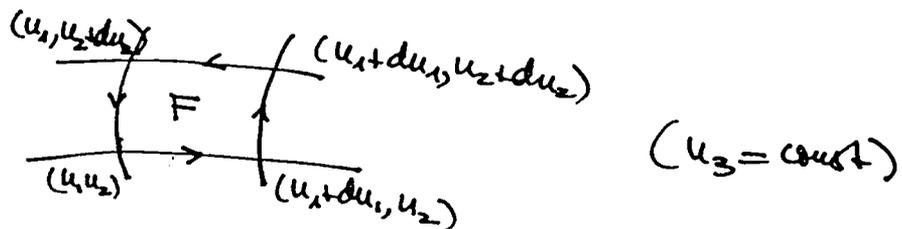
$$\Delta \varphi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (\text{A.11})$$

Zur Berechnung von $\text{rot } \underline{A}$ gehen wir analog vor. Nach dem Stokes'schen Satz ist (s. Fig.)

$$(\underline{n}, \text{rot } \underline{A}) = \lim_{|F| \rightarrow 0} \frac{1}{|F|} \int_{\partial F} \underline{A} \cdot d\underline{s} \quad (\text{A.12})$$



Für F wählen wir z.B. das folgende "infinitesimale Rechteck" mit $u_3 = \text{const.}$



Dann ist $|F| = g_1 g_2 du_1 du_2$ und (fasse die Beiträge von gegenüberliegenden Wegen zusammen)

$$\int_{\partial F} \underline{A} \cdot d\underline{s} = - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 g_1) du_1 du_2 + \frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 g_2) du_2 du_1$$

Folglich

$$(\text{rot } \underline{A})_3 = \frac{1}{g_1 g_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (g_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (g_1 A_1) \right] \quad (\text{A.B})$$

Die anderen Komponenten erhält man durch zyklische Vertauschungen.

Setzen wir in diese Formeln (A.6) ein, so erhalten wir für Polarkoordinaten die Ausdrücke:

$$\text{grad } \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} \Phi \quad (\text{A.16})$$

mit

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.17})$$

$$(\text{rot } \underline{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\vartheta \right]$$

$$(\text{rot } \underline{A})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} A_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right]$$

$$(\text{rot } \underline{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_r \right] \quad (\text{A.18})$$

* * *

B. Kugelfunktionen

Es sei H_l der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grade l über \mathbb{R}^3 . Ein Element $u_l(\underline{x}) \in H_l$ hat also die Form

$$u_l(\underline{x}) = \sum_{\substack{i,j,k \\ (i+j+k=l)}} c_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k \quad (\text{B.1})$$

mit beliebigen Koeffizienten $c_{ijk} \in \mathbb{C}$. Die Dimension von H_l ist offensichtlich gleich der Zahl der geordneten Tripel (u_1, u_2, u_3) mit $u_i \in \mathbb{N}_0$ und $u_1 + u_2 + u_3 = l$. Diese Tripel

kann man wie folgt ausdrücken:

$$\begin{array}{ccc}
 u_1 & u_2 & u_3 \\
 \hline
 l & 0 & 0 \\
 l-1 & \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \\
 \vdots & & \\
 0 & \begin{cases} l \\ l-1 \\ \vdots \\ 0 \end{cases} & \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ l \end{cases}
 \end{array}$$

Also ist

$$\dim H_l = 1 + 2 + \dots + (l+1) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2). \quad (\text{B.2})$$

In H_l definieren wir das Skalarprodukt

$$(u_l, v_l) = \int_{S^2} u_l(\hat{x})^* v_l(\hat{x}) d\Omega, \quad \hat{x} = \underline{x}/|\underline{x}|, \quad (\text{B.3})$$

wobei $d\Omega$ das Oberflächenelement der 2 -Sphäre ist; in Polarkoordinaten ist $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. Das Mass $d\Omega$ ist invariant gegenüber Rotationen: Für $f \in L^1(S^2, d\Omega)$ und $R \in SO(3)$ gilt

$$\int_{S^2} f(R\underline{x}) d\Omega = \int_{S^2} f(\underline{x}) d\Omega. \quad (\text{B.4})$$

Mit dem Skalarprodukt (B.3) ist H_l ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Die Gruppe $SO(3)$ operiert in natürlicher Weise in diesem Vektorraum:

$$R \in SO(3) \mapsto U(R): (U(R)u_l)(\underline{x}) = u_l(R^{-1}\underline{x}). \quad (\text{B.5})$$

Die Zuordnung $R \mapsto U(R)$ ist eine Darstellung von $SO(3)$, d.h. es gilt $U(R_1 R_2) = U(R_1) U(R_2)$. Die linearen Transformationen $U(R)$ sind wegen (B.4) unitär.

Nun betrachten wir die lineare Abbildung

$$\Delta : H_l \longrightarrow H_{l-2} \quad (l \geq 2) \quad (\text{B.6})$$

definiert durch

$$(\Delta u_l)(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}(\underline{x}). \quad (\text{B.7})$$

Den Kern von Δ bezeichnen wir mit V_l . Da für $l=0,1$ $\Delta u_l = 0$ ist, sehen wir $V_l = H_l$ für $l=0,1$.

Es gilt

$$\dim V_l \geq \dim H_l - \dim H_{l-2} = 2l+1 \quad (\text{B.8})$$

Definition: Jede Funktion $u_l(\hat{x})$, $u_l \in V_l$, auf der Kugel S^2 ist eine Kugelfunktion zum Index l .

Mit \hat{V}_l bezeichnen wir den Vektorraum der Kugelfunktionen zum Index l .

Notiere: Mit Y_l ist auch Y_l^* eine Kugelfunktion zum Index l . In \hat{V}_l definieren wir das Skalarprodukt

$$(Y_l, Y_l') = \int_{S^2} Y_l(\underline{e})^* Y_l'(\underline{e}) d\Omega. \quad (\text{B.9})$$

Für jedes $u_l \in V_l$ ist $u_l(\underline{x}) = |\underline{x}|^l Y_l(\hat{x})$ mit $Y_l \in \hat{V}_l$. Die Zuordnung $u_l \mapsto Y_l$ ist natürlich eine Isometrie von V_l auf \hat{V}_l .

Im folgenden betrachten wir auch den Raum $C(S^2)$ der stetigen Funktionen über S^2 mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{S^2} f(\underline{e})^* g(\underline{e}) d\Omega. \quad (\text{B.10})$$

Der Hilbertraum $L^2(S^2, d\Omega)$ ist die vollständige Hülle von $C(S^2)$ bezüglich (B.10).

Natürlich ist \hat{V}_l ein endlichdimensionaler Unterraum von $L^2(S^2, d\Omega)$.

Lemma 1: Die Unterräume $\hat{V}_l, \hat{V}_{l'}$ von $L^2(S^2, d\Omega)$ sind für $l \neq l'$ zueinander orthogonal.

Beweis: Wir wenden auf die Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$, $\partial K = S^2$ den Green'schen Satz an: Sei $u_l \in V_l, u_{l'} \in V_{l'}$, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_K (u_l^* \Delta u_{l'} - u_{l'} \Delta u_l^*) d\vec{x} = \int_{S^2} (u_l^* \frac{\partial u_{l'}}{\partial r} - u_{l'} \frac{\partial u_l^*}{\partial r}) d\Omega \\ &= \int_{S^2} (Y_l^* l' Y_{l'} - Y_{l'} l Y_l^*) d\Omega; \quad u_l(x) = |x|^l Y_l(\hat{x}), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Für $l \neq l'$ folgt also in der Tat $(Y_l, Y_{l'}) = 0$. \square

Nun beweisen wir den

Satz 1: Die Räume $r^{2k} V_{l-2k} = \{r^{2k} \sigma_{l-2k} \mid \sigma_{l-2k} \in V_{l-2k}\}$ ($r = |x|$) sind für alle $k = 0, 1, 2, \dots, \lfloor l/2 \rfloor$ paarweise orthogonale Unterräume von H_l . Ferner gilt

$$H_l = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} r^{2k} V_{l-2k} \quad (\text{B.11})$$

und

$$\dim V_l = l+1. \quad (\text{B.12})$$

Beweis: Trivialerweise ist $r^{2k} V_{l-2k}$ ein Unterraum von H_l . Die Orthogonalität dieser Unterräume für verschiedene k ist eine unmittelbare Folge von Lemma 1. Damit gilt mit (B.8) sogar die Ungleichung

$$\dim H_l \geq \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \dim V_{l-2k} \geq \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (l-2k+1) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2).$$

Zusammen mit (B.2) ^{folgt} $\dim V_l = l+1$ und damit (B.11). \square

Lemma 2: Die Unterräume $V_l \subset H_l$ sind invariant unter der Darstellung (B.5) von $SO(3)$.

Beweis: Sei $\underline{x}' = R^{-1}\underline{x}$; eine einfache Rechnung zeigt

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u_\ell(\underline{x}') = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k'^2} u_\ell(\underline{x}')$$

Mit u_ℓ ist deshalb auch $U(R)u_\ell$ in V_ℓ . \square

Mit dem Satz 1 haben wir die Darstellung U in H_ℓ ausreduziert. (Die Restriktion von U auf ${}^{+2k}V_{\ell-2k}$ ist sogar irreduzibel, d.h. ${}^{+2k}V_{\ell-2k}$ enthält keine nichttrivialen Unterräume; dies benötigen wir aber in folgenden nicht.)

Definieren wir in \hat{V}_ℓ die Darstellung

$$(\hat{U}(R)Y_\ell)(\underline{e}) = Y_\ell(R^{-1}\underline{e}) \quad (\text{B.13})$$

so ist nach Lemma 2 \hat{V}_ℓ bezüglich $\hat{U}(R)$ invariant. Wir halten noch fest, dass nach (B.12)

$$\dim \hat{V}_\ell = 2\ell + 1. \quad (\text{B.14})$$

Vollständigkeit

Es gilt der

Satz 2: Die Menge der Kugelfunktionen $\{Y_\ell \mid Y_\ell \in \hat{V}_\ell, \ell \in \mathbb{N}_0\}$ ist total im Banach-Raum $C(S^2)$ (mit dem sup-Norm).

Beweis: Sei $p_L(x)$ ein Polynom vom Grade L . Wir setzen $\hat{p}_L = p_L|_{S^2}$. Nach dem Satz von Weierstrass ist die Menge der $\hat{p}_L, L \in \mathbb{N}_0$, dicht in $C(S^2)$. Andererseits ist offensichtlich

$$p_L = \sum_{\ell=0}^L u_\ell, \quad u_\ell \in H_\ell$$

und nach Satz 1 ist

$$u_\ell = \sum_{k=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} {}^{+2k}v_{\ell-2k}, \quad v_{\ell-2k} \in V_{\ell-2k}.$$

Daraus folgt, dass \hat{p}_L eine endliche Linearkombination von

Kugelfunktionen ist. \square

Korollar: Die Menge $\{Y_l \mid Y_l \in \hat{V}_l, l \in \mathbb{N}_0\}$ der Kugelfunktionen ist total im Hilbertraum $L^2(S^2, d\Omega)$.
 Ist, für festes l , $\{Y_{lm}, -l \leq m \leq l\}$ eine orthonormierte Basis von \hat{V}_l , so bilden die
 $\{Y_{lm}, l \in \mathbb{N}_0, m = l, l-1, \dots, -l\}$
 eine Orthonormalbasis in $L^2(S^2, d\Omega)$.

Explizite Form der Y_{lm}

Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Eine Funktion der Form

$$\Phi(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + ix \cos t + iy \sin t, t) dt, \quad x = (x, y, z)$$

erfüllt die Laplace-Gleichung, falls $f(r, t)$ so beschaffen ist, dass man unter dem Integral differenzieren darf:

$$\Delta \Phi = \int_{-\pi}^{+\pi} (1 - \cos^2 t - \sin^2 t) f''(\dots, t) dt = 0.$$

(f'' ist die z. Ableitung von $f(r, t)$ nach dem 1. Argument.)

Mit dieser Bemerkung konstruieren wir jetzt $(z+i)$ homogene Polynome vom Grade l , welche die Laplace-Gleichung erfüllen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix \cos t + iy \sin t)^l \cos mt dt, \quad (\text{B.15})$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix \cos t + iy \sin t)^l \sin mt dt. \quad (\text{B.16})$$

In räumlichen Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) lautet (B.15)

auf S^2 :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos(t - \varphi)]^l \cos mt dt =$$

-IV.10-

$$= \int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \psi]^l \cos m(\varphi + \psi) d\psi.$$

Da der Integrand bezüglich ψ die Periode 2π hat, kann man ein beliebiges Integrationsintervall der Länge 2π wählen. Also ist das letzte Integral auch gleich

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \psi]^l \cos m(\varphi + \psi) d\psi.$$

Nach Aufspaltung von $\cos m(\varphi + \psi)$ kann man diese Kugelfunktion auf folgende Gestalt bringen (da $\sin m\psi$ in φ ungerade ist):

$$\cos m\varphi \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \psi]^l \cos m\psi d\psi \quad (\text{B.17})$$

$(m = 0, 1, 2, \dots, l).$

Entsprechend führt das Integral (B.16) auf die Kugelfunktion

$$\sin m\varphi \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \psi]^l \cos m\psi d\psi \quad (\text{B.18})$$

$(m = 1, 2, \dots, l).$

Die lineare Unabhängigkeit der $(2l+1)$ Kugelfunktionen (B.17) und (B.18) ist offensichtlich (φ -Abhängigkeit!).

Nun definieren wir die Legendreschen Polynome P_l durch

$$P_l(x) = \frac{1}{l! 2^l} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l] \quad (\text{B.19})$$

und die daraus gebildeten Funktionen

$$P_l^{(u)}(x) := (-1)^u (1-x^2)^{u/2} \frac{d^u}{dx^u} P_l(x)$$

$$= (-1)^u \frac{(1-x^2)^{u/2}}{l! 2^l} \frac{d^{l+u}}{dx^{l+u}} [(x^2-1)^l] \quad (\text{B.20})$$

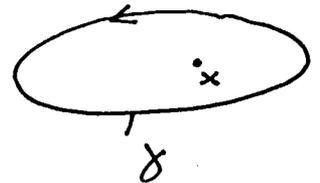
Ich behaupte, dass die Kugelfunktionen (B.17) und (B.18) proportional sind zu

$$P_l(\cos \vartheta), P_l^m(\cos \vartheta) \cos m\varphi, P_l^m(\cos \vartheta) \sin m\varphi \quad (\text{B.21})$$

($m = 1, 2, \dots, l$).

Beweis: Nach der Cauchy-Formel ist

$$(x^2-1)^l = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z^2-1)^l}{z-x} dz,$$



wo γ ein beliebiger geschlossener Weg ist, in dessen Innerem der Punkt x liegt; γ ist dabei entgegen dem Uhrzeigersinn zu durchlaufen. Daraus erhalten wir

$$P_l(x) = \frac{1}{2^{l+1} i\pi} \int_{\gamma} \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}} dz.$$

Wir wählen für γ den Kreis um x mit dem Radius $|x^2-1|$ (x sei $\neq \pm 1$). Dann kann die Integrationsvariable wie folgt dargestellt werden:

$$z = x + (x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}.$$

Die Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{x^2-1}$ ist willkürlich. Man kann annehmen, dass ψ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ variiert. Mit dieser Variablensubstitution kommt

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{[x-1+(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}][x+1+(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}]^l}{2(x^2-1)^{1/2} e^{i\psi}} \right\} d\psi.$$

~~Da nur der in ψ gerade Anteil des Integranden bei-~~
Es ergibt sich nach elementarer Rechnung

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [x + (x^2-1)^{1/2} \cos \psi]^l d\psi. \quad (\text{B.22})$$

Deshalb ist $P_l(\cos \vartheta)$ proportional zu (B.17) für $m=0$.

Ganz analog findet man für P_l^m

$$P_l^m(x) = (-1)^m e^{-i m \pi / 2} \frac{(l+1)(l+2) \dots (l+m)}{2^m} \int_{-\pi}^{+\pi} [x + (x^2 - 1)^{1/2} \cos \psi]^l \cos m \psi \, d\psi$$

$$= (-1)^m e^{-i m \pi / 2} \frac{(l+m)!}{l! 2^m} \int_{-\pi}^{+\pi} [x + (x^2 - 1)^{1/2} \cos \psi]^l \cos m \psi \, d\psi. \quad (\text{B.23})$$

Aus der letzten Formel folgt nebenbei □

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (\text{B.24})$$

An Stelle der Basis (B.21) können wir auch folgende wählen

$$P_l(\cos \vartheta), P_l^m(\cos \vartheta) e^{\pm i m \varphi}, \quad m=1, 2, \dots, l. \quad (\text{B.25})$$

In den Übungen wird die folgende Normierung hergeleitet

$$\int_{-1}^{+1} [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \quad (\text{B.26})$$

Wir wissen schon, dass die Kugelfunktionen für verschiedene l orthogonal aufeinander sind. Für gleiche l sind die Basiselemente (B.25) ebenfalls zueinander orthogonal, wie aus der φ -Abhängigkeit hervorgeht. Für die Normierung gilt auch (B.26)

$$\int_{S^2} [P_l(\cos \vartheta)]^2 d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}, \quad (\text{B.27})$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{S^2} [P_l^m(\cos \vartheta) \cos m \varphi]^2 d\Omega &= \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \\ \int_{S^2} [P_l^m(\cos \vartheta) \sin m \varphi]^2 d\Omega &= \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.28})$$

Die in der Physik gebräuchliche Basis von Kugelfunktionen

ist wie folgt definiert

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi} \quad (-l \leq m \leq l). \quad (\text{B.29})$$

Diese Basis ist orthonormiert:

$$\int_{S^2} Y_{lm}(\hat{x})^* Y_{l'm'}(\hat{x}) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{B.30})$$

Aus (B.24) folgt

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi)^*. \quad (\text{B.31})$$

Notiere auch

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\vartheta). \quad (\text{B.32})$$

Additionstheorem der Kugelfunktionen:

Für zwei Einheitsvektoren \hat{x} und \hat{x}' gilt

$$P_l(\hat{x} \cdot \hat{x}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\hat{x}') Y_{lm}(\hat{x}). \quad (\text{B.33})$$

Beweis: Da, für festes l , die lineare Hülle von $\{Y_{lm}, m=-l, \dots, +l\}$ invariant ist unter $\hat{U}(R)$ (siehe (B.13)), können wir $Y_{lm}(R^{-1}\hat{x})$, $R \in SO(3)$, wie folgt entwickeln:

$$Y_{lm}(R^{-1}\hat{x}) = \sum Y_{l'm'}(\hat{x}) D_{m'm}^l(R). \quad (\text{B.34})$$

Die $D^l(R)$ sind die Matrizen zu den Darstellungsoperatoren $\hat{U}(R)$ bezüglich der orthonormierten Basis $\{Y_{lm}\}$ und sind deshalb unitär; ferner ist $D^l(R_1)D^l(R_2) = D^l(R_1R_2)$.

Nun sei \underline{e} der Einheitsvektor in der z -Richtung und $\hat{x}' = R\underline{e}$.

Dann gilt nach (B.32) und (B.34):

$$\begin{aligned} P_l(\hat{x} \cdot \hat{x}') &= P_l(\hat{x} \cdot R \underline{e}) = P_l(R^{-1} \hat{x} \cdot \underline{e}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(R^{-1} \hat{x}) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_m Y_{lm}(\hat{x}) D_{m0}^l(R). \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Nun gilt die wichtige Beziehung

$$\boxed{D_{m0}^l(R) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\hat{x}')} \quad (\text{B.36})$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\hat{x}') &= Y_{lm}(R \underline{e}) = \sum_{m'} Y_{lm'}(\underline{e}) D_{m'm}^l(R^{-1}) \\ &= \sum_{m'} \underbrace{Y_{lm'}(\underline{e})}_{\delta_{m'0} Y_{l0}(\underline{e})} D_{m'm}^l(R^{-1}) = \delta_{m'0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \underbrace{P_l(\cos \theta)}_1 \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{0m}^l(R^{-1}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^l(R)^*. \end{aligned}$$

Setzen wir (B.36) in (B.35) ein, so folgt die Behauptung (B.33). \square

Multipolentwicklung des Coulombpotentials

Zunächst betrachten wir Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta \phi = 0$ der Form $\phi = u_l(r) Y_{lm}(\hat{x})$. Da nach (A.16)

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}, \quad (\text{B.37})$$

und $\Delta(r^l Y_{lm}(\hat{x})) = 0$, d.h.

Δ_{S^2}
Laplace-Beltrami Operator
auf S^2

$$\Delta_{S^2} Y_{lm}(S, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(S, \varphi), \quad (\text{B.38})$$

ergibt sich für $u_l(r)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} u_l \right) - l(l+1) u_l = 0. \quad (\text{B.39})$$

Für $u_l =: \frac{1}{r} v_l$ folgt daraus

-IV.15

$$v_l'' - \frac{l(l+1)}{r^2} v_l = 0,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$v_l = A r^{l+1} + B r^{-l}.$$

Für die allgemeine Lösung von $\Delta\phi = 0$ können wir deshalb den folgenden Ansatz machen:

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\hat{\underline{x}}). \quad (\text{B.40})$$

Ist ϕ axialsymmetrisch um die z-Achse, so gilt speziell

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta). \quad (\text{B.41})$$

Als Beispiel für (B.41) gilt ($r_< = \min(|\underline{x}|, |\underline{x}'|)$, $r_> = \max(|\underline{x}|, |\underline{x}'|)$):

$$\boxed{\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\hat{\underline{x}} \cdot \hat{\underline{x}'})}. \quad (\text{B.42})$$

(Erzeugende der Legendre-Polyn.)

Beweis von (B.42): Wir wählen \underline{x}' in der z-Richtung. Für $\underline{x} \neq \underline{x}'$ genügt die linke Seite, als Funktion von \underline{x} , der Laplace-Gleichung. Diese Funktion ist ausserdem axialsymmetrisch und hat folglich die Form (B.41). Für \underline{x} in der z-Richtung ist (wegen $P_l(1) = 1$) die rechte Seite von (B.41) gleich

$$\sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})$$

Die linke Seite in (B.42) ist andererseits

$$\frac{1}{|1-r'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Benutzen wir in (B.42) noch das Additionstheorem (B.33) so erhalten wir die wichtige Formel (Ausgangspunkt für Multipolentwicklung):

$$\boxed{\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\hat{\underline{x}'}) Y_{lm}(\hat{\underline{x}})} \quad (\text{B.43})$$

* * *