

KLASSISCHE MECHANIK

GRUNDKURS ÜBER SYSTEME ENDLICH VIELER FREIHEITSGRADE

(N. Straumann)

Die Mechanik ist das Rückgrat
der mathematischen Physik.

A. Sommerfeld

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

TEIL I: NEWTONSCHE MECHANIK

KAPITEL 1. RAUM, ZEIT UND BEWEGUNGSGLEICHUNGEN	2
1.1 Die Struktur von Raum und Zeit	3
1.2 Inertialsysteme, absolute Zeit, Galilei Transformationen	7
1.3 Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten	12
1.4 Erhaltungssätze für abgeschlossene Systeme	22
1.5 Die Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik	29
1.6 Die Struktur der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit in der Newtonschen Mechanik	31
KAPITEL 2. UNTERSUCHUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN	35
2.1 Allgemeines über Differentialgleichungen	35
2.2 Autonome kanonische Systeme mit einem Freiheitsgrad	50
2.3 Das Zweikörperproblem mit Zentralkräften	60
2.4 Beschleunigte Bezugssysteme	72

TEIL II: LAGRANGE - MECHANIK

KAPITEL 3. LAGRANGESCHE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN UND HAMILTONSCHES VARIATIONSPRINZIP	87
3.1 Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art	87
3.2 Kovarianz der Eulerschen Ableitung	92
3.3 Das Hamiltonsche Variationsprinzip	94
3.4 Symmetrien und Erhaltungssätze	96
KAPITEL 4. SYSTEME MIT ZWANGSBEDINGUNGEN	102
4.1 Holonome und nichtholonome Zwangsbedingungen	102
4.2 Das D'Alembertsche Prinzip	106
4.3 Die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art	108
4.4 Verallgemeinerte Koordinaten, Lagrangesche Gleichungen 2. Art	112

TEIL III: DIE HAMILTONSCHE FORMULIERUNG DER MECHANIK

KAPITEL 5.	PHASENRAUM, KANONISCHE GLEICHUNGEN UND SYMPLEKTISCHE TRANSFORMATIONEN	122
A.	Legendre Transformation	123
B.	Kanonische Gleichungen	128
C.	Symplektische Transformationen	133
D.	Formulierung mit Differentialformen	140
Anhang.	Wiederkehr-Theorem von Poincaré, statistischer Ergodensatz und quasi-periodische Strömung auf dem Torus	145
KAPITEL 6.	KLEINE SCHWINGUNGEN, PARAMETRISCHE RESONANZ UND STABILITÄT VON GLEICHGEWICHTSLAGEN	156
6.1	Linearisierung, Ljapunovstabilität	156
6.2	Kleine Oszillationen	168
6.3	Parametrische Resonanz	179
6.4	Gleichgewichtslagen im restringierten 3-Körperproblem	184
Anhang.	Beweise der Sätze 6.3, 6.4	193
KAPITEL 7.	KANONISCHE TRANSFORMATIONEN	196
7.1	Die Poisson-Klammern	196
7.2	Charakterisierungen von kanonischen Transformationen	202
7.3	Erzeugende Funktionen von kanonischen Transformationen	210
KAPITEL 8.	SYMMETRIEN UND ERHALTUNGSSÄTZE	217
8.1	Integrale der Bewegung	217
8.2	Galileiinvarianz und die zehn klassischen Erhaltungssätze	219
8.3	Liesche Gruppen von kanonischen Transformationen	225
8.4	Projektive Realisierungen der Galileigruppe	236
KAPITEL 9.	DIE HAMILTON-JACOBI THEORIE	241
KAPITEL 10.	INTEGRABLE SYSTEME, KANONISCHE STÖRUNGSTHEORIE	254
10.1	Integrable Systeme	254
10.2	Winkel- und Wirkungsvariable	258
10.3	Störungstheorie	263
10.4	Adiabatische Invarianten	275
10.5	Qualitatives Verhalten von autonomen kanonischen Systemen in der Nähe von integrablen Systemen	282
10.6	Winkel- und Wirkungsvariable für mehrfach periodische Systeme	291
10.7	Störungstheorie für entartete Systeme	296

KAPITEL 11. DER STARRE KÖRPER	303
11.1 Kinematik des starren Körpers	303
11.2 Die Eulerschen Gleichungen für den starren Körper	308
11.3 Der kräftefreie Kreisel	310
11.4 Die Eulerschen Winkel	319
11.5 Kanonische Formulierung und gruppentheoretische Interpretation	322
11.6 Der schwere Kreisel mit Fixpunkt	329
11.7 Winkel- und Wirkungsvariablen für den schweren symmetrischen Kreisel	338

MATHEMATISCHE ANHÄNGE

ANHANG I. BEGRIFFE UND SÄTZE AUS DER ANALYSIS	341
A. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	341
B. Differentialformen	344
ANHANG II. LINEARE LIESCHE GRUPPEN	351
1. Die volle lineare Gruppe $GL(n, K)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$	351
2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n	352
3. Tangentialraum, Tangentialabbildung	358
4. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten	359
5. Lineare Liesche Gruppen	360
6. Die Liealgebra einer linearen Lieschen Gruppe	361
7. Die Exponential-Darstellung	364
8. Homomorphismen von Liegruppen und Liealgebren	367
9. Liesche Transformationsgruppen	369
ANHANG III. BERECHNUNG DER INTEGRALE (10.100)	378
UEBUNGEN	381
LITERATUR	389
SACHWORTVERZEICHNIS	391

Einleitung

Die klassische Mechanik (KM) steht nicht nur historisch, sondern auch inhaltlich am Anfang der theoretischen Physik. Am Beispiel der KM werden wir in diesen Vorlesungen die Prinzipien und Methoden theoretisch-physikalischer Naturbeschreibung kennenlernen. Grundlegende Begriffe, wie Observable, Zustände, Zeitevolution, Symmetrien und Erhaltungssätze, etc., werden in allen anderen Gebieten der theoretischen Physik, wenn auch in gewandelter Form, wieder auftreten. Ohne tiefere Einblicke in die KM ist insbesondere ein wirkliches Verständnis der Quantenmechanik nicht möglich.

Die klassische Mechanik wird, wie jede andere erfolgreiche Theorie, nie veralten. Als physikalische Theorie beschreibt sie in mathematischer Sprache ideale Gebilde, welche als Modelle für wirkliche Objekte und Prozesse dienen. Ihre "Richtigkeit" besteht darin, dass sie einen grossen Bereich von Erscheinungen (Himmelsmechanik, technische Mechanik, etc.) sehr gut beschreibt. Für diesen Zuständigkeitsbereich wird sie immer gültig bleiben.

Die Tatsache, dass der menschliche Geist imstande ist, tragende Theorien (wie die klassische Mechanik, die Elektrodynamik, die Relativitätstheorie oder die Quantentheorie) zu schaffen, welche riesige Erfahrungsbereiche adäquat abbilden, gehört zum Wunderbaren.

Die KM (allgemeiner die "Theorie der dynamischen Systeme") ist immer noch ein sehr lebendiges Forschungsgebiet. Wie schon in der Vergangenheit, haben sich auch in den letzten Jahrzehnten bedeutende Mathematiker mit Problemen der klassischen Mechanik befasst.

In der klassischen Mechanik kommen eine Reihe von mathematischen Disziplinen zur Anwendung. Dazu gehören: Differentialgleichungen, differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen, symplektische Geometrie, Liesche Gruppen, Ergodentheorie, Variationsrechnung, etc.

Ich werde mich in diesen Vorlesungen bemühen, nur mathematische Hilfsmittel vorauszusetzen, welche in den drei ersten Semestern im Mathematikunterricht geboten werden. Dies zieht es nach sich, dass ich auf die elegantere differentialgeometrische Formulierung der kanonischen Mechanik verzichten muss. Ferner bin ich gezwungen, den Phasenraum immer als Teilmenge des \mathbb{R}^n zu betrachten, obschon dies schon bei einfachen Systemen nicht immer der Fall ist (d.h. wir arbeiten immer in einer Karte).

Neben der Durchrechnung von wichtigen "integrablen" Problemen werden in dieser Vorlesung auch allgemeine qualitative, geometrische Aspekte eine wichtige Rolle spielen. Das Ausrechnen von Zahlen können wir dem Computer überlassen.

Ein wunderbares Mechanikbuch, welches über diese Vorlesung hinausführt, ist

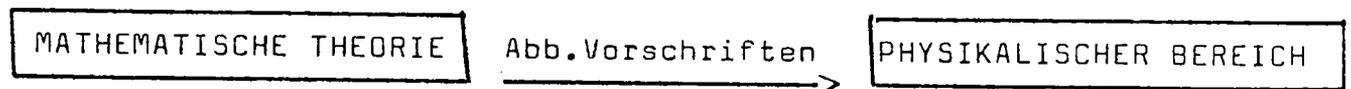
V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Graduate Texts in Mathematics, Bd.60, 1978.

Was ist eine physikalische Theorie ?

Da die KM für die meisten die erste Vorlesung in theoretischer Physik ist, will ich versuchen, eine kurze Antwort auf diese Frage zu geben.

Zu einer physikalischen Theorie gehören drei wesentliche Teile:

- 1) Eine mathematische Theorie, d.h. ein Bereich von mathematischen Objekten mit abstrakt definierten Relationen und Strukturen (im Sinne von Bourbaki). [Man denke beispielsweise an die Grundgleichungen der Elektrodynamik, ohne die physikalische Bedeutung der auftretenden Grössen.]
- 2) Ein Bereich von feststellbaren Tatsachen. Dieser Wirklichkeitsbereich gehört insbesondere für die modernen Gebiete der Physik kaum mehr der Alltagserfahrung an. [Man sehe sich nur einmal ein Experiment im CERN an.]
- 3) Ein System von Abbildungs- oder Anwendungsvorschriften zwischen mathematischen Objekten und physikalischen Tatsachen, d.h. experimentell gewonnenen Ergebnissen. Schematisch:



Dazu ist folgendes anzumerken:

- (i) Das mathematische System ist exakt und wohl definiert (mindestens in einer voll entwickelten Theorie), aber "inhaltsleer"; seinen "Inhalt" erhält es erst durch die Abbildungsvorschriften.

(ii) Der physikalische Bereich ist nicht scharf definiert. Dies geht z.B. daraus hervor, dass ein Längenunterschied von 10^{-100} cm physikalisch bedeutungslos ist.

(iii) Daraus ergibt sich, dass die Abbildungsvorschriften immer ungenau sind. Das mathematische Bild ist kein isomorphes Bild der Wirklichkeit. Man muss immer idealisieren !

Kurz können wir sagen: Eine physikalische Theorie ist ein mathematisches Bild eines Ausschnittes der Wirklichkeit.

Dieser Ausschnitt nimmt zwar mit der Entwicklung der Wissenschaft zu (er hat sich z.B. durch die Quantentheorie beträchtlich erweitert), aber die Methode der theoretischen Physik wird sich wohl immer auf Ausschnitte beschränken müssen. Die Weltformel ist eine Utopie !

Die Schöpfung dieses Bildes ist das Werk unserer Vernunft. Das Bild der Wirklichkeit ist eine freie Erfindung des menschlichen Geistes. Theorien können nicht durch logische Schlüsse aus Protokollbüchern abgeleitet werden. Mit den Worten von W. Pauli:

"Theorien kommen zustande durch ein vom empirischen Material inspiriertes Verstehen, welches am besten im Anschluss an Plato als Zur-Deckung-Kommen von inneren Bildern mit äusseren Objekten und ihrem Verhalten zu deuten ist."

Diese Einsicht hat sich erst in unserem Jahrhundert langsam durchgesetzt, vor allem deshalb, weil " der gedankliche Abstand zwischen den grundlegenden Begriffen und Grundgesetzen einerseits und den mit unseren Erfahrungen in Beziehung setzenden Konsequenzen andererseits immer mehr zunimmt" (A. Einstein).

Worin besteht nun das eigentliche Ziel der theoretischen Physik ? Dazu sagt Einstein treffend:

"Vornehmstes Ziel aller Theorie ist es, ein möglichst einfaches Bild für einen möglichst grossen physikalischen Bereich zu schaffen. Die irreduziblen Grundelemente der Theorie sollten so wenig zahlreich als möglich sein."

Seine eigenen grossartigen Erfolge auf diesem Weg haben ihn zu folgender Aussage ermutigt:

"Nach unseren bisherigen Erfahrungen sind wir zum Vertrauen berechtigt, dass die Natur die Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten ist. Durch rein mathematische Konstruktion vermögen wir nach meiner Ueberzeugung diejenigen Begriffe und diejenige gesetzliche Verknüpfung zwischen ihnen zu finden, die den Schlüssel für das Verstehen der Naturerscheinungen liefern."

Das ist freilich eine Aussage des "späten Einstein".

* * *

T E I L I

N E W T O N S C H E M E C H A N I K

"Newton verzeih' mir; du fandest den einzigen Weg, der zu deiner Zeit für einen Menschen von höchster Denk- und Gestaltungskraft eben noch möglich war. Die Begriffe, die du schufst, sind auch jetzt noch führend in unserem physikalischen Denken, obwohl wir nun wissen, dass sie durch andere, der Sphäre der unmittelbaren Erfahrung ferner stehende ersetzt werden müssen, wenn wir ein tieferes Begreifen der Zusammenhänge anstreben."

A. Einstein

In diesem ersten Teil besprechen wir die Grundlagen der klassischen Mechanik. Im Zentrum stehen natürlich die Newtonschen Bewegungsgleichungen. Diese setzen eine gewisse Struktur von Raum und Zeit voraus. Umgekehrt zeigt eine Analyse der Newtonschen Bewegungsgleichungen, dass das Raum-Zeit Kontinuum nicht nur kausale und metrische Eigenschaften hat, sondern als 4-dimensionale Mannigfaltigkeit auch eine affine Struktur besitzt, deren zugehörige zeitartige Geraden freie Bewegungen darstellen. Dies wird im ersten Kapitel ausgeführt. Im zweiten Kapitel beginnen wir mit der Untersuchung der Bewegungsgleichungen.

Kapitel 1. Raum, Zeit und Bewegungsgleichungen

"Die Geometrie hat demnach ihre Basis in der praktischen Mechanik und sie ist derjenige Teil der allgemeinen Mechanik, welcher die Kunst, genau zu messen, aufstellt und beweist."

J. Newton (in "Principia")

Raum und Zeit gehören zu den grundlegendsten Begriffen der Physik. Jede physikalische Theorie setzt zur Formulierung ihrer Gesetze und deren Interpretation eine gewisse Raum-Zeit Struktur voraus, und umgekehrt schränkt die Geometrie von Raum und Zeit die Form dieser Gesetze in erheblichem Masse ein.

Für den Physiker ist es nicht zulässig, die Geometrie von Raum und Zeit von den übrigen physikalischen Gesetzen isoliert zu betrachten. Die Struktur von Raum und Zeit wird durch das Verhalten von Uhren und Massstäben festgelegt, deren Eigenschaften aber andererseits durch physikalische Gesetze bestimmt sind. Deshalb sind nur beide zusammen empirisch verifizierbar. Dies wurde z.B. von H. Weyl sehr betont. In seiner "Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft" schreibt er (S. 171):

"Gegen das Argument, dass in eine versuchte experimentelle Prüfung der Geometrie immer auch eigentlich physikalische Aussagen über das Verhalten von starren Körpern und Lichtstrahlen hineinspielen, ist zu sagen, dass die physikalischen Gesetze so wenig wie die geometrischen, jedes für sich, eine Prüfung in der Erfahrung zulassen, sondern die "Wahrheit" einer konstruktiven Theorie nur im Ganzen geprüft werden kann."

Dasselbe hat wohl auch Newton im einleitenden Zitat gemeint.

1.1 Die Struktur von Raum und Zeit

Die Zeit beschreiben wir durch das Kontinuum der reellen Zahlen \mathbb{R} , als topologischen Raum aufgefasst. Die übliche Ordnung \leq entspricht "früher - später". Eine operative Definition der "metrischen" (nicht bloss "topologischen") Zeit wird später gegeben.

Der Raum wird als 3-dimensionaler Euklidischer Raum idealisiert.

Es ist vielleicht nicht ganz überflüssig, an die Definition eines Euklidischen Raumes zu erinnern. (Dies gibt mir auch Gelegenheit, gewisse Notationen einzuführen.) Zunächst benötigen wir den Begriff des affinen Raumes. Dieser wird auch später in § 1.6 wichtig sein.

Definition 1.1: Ein affiner Raum ist ein Tripel $(M, E, +)$.
Darin ist M eine Menge, E ein (endlichdimensionaler) Vektorraum und $+$ bezeichnet eine freie transitive Operation von E , als Abelsche Gruppe aufgefasst, auf M . Dies bedeutet: es gibt eine Abbildung von $E \times M$ nach M , welche einem Paar $(v, p) \in E \times M$ einen Punkt $v+p \in M$ so zuordnet, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $(v_1+v_2) + p = v_1 + (v_2 + p)$, $v_1, v_2 \in E, p \in M$;
- (ii) $v + p = p \iff v = 0$, $v \in E, p \in M$;
- (iii) Zu $p, q \in M$ existiert ein $v \in E$ mit $v + p = q$.

Notation: Den nach (ii) eindeutigen Vektor in (iii) bezeichnen wir mit \vec{pq} , oder auch mit $q - p$.

Wir benötigen auch die folgende

Definition 1.2: Ein affines Koordinatensystem $(0; e_1, \dots, e_n)$ besteht aus einem festen Punkt $0 \in M$ und einer Basis (e_1, \dots, e_n) von E . Jeder Punkt $p \in M$ bestimmt n Zahlen x^1, \dots, x^n durch

$$\vec{0p} = \sum_{i=1}^n x^i e_i.$$

Die (x^1, \dots, x^n) sind die affinen Koordinaten von p relativ zum affinen Koordinatensystem $(0; e_1, \dots, e_n)$.

Es seien (x'^1, \dots, x'^n) die affinen Koordinaten von p bezüglich eines anderen affinen Koordinatensystems $(0'; e'_1, \dots, e'_n)$, dann bestehen zwischen den x'^i und den x^i Beziehungen der Form

$$x'^i = \sum_j \lambda^i_j x^j + a^i$$

(= homogene Transf. + Translation).

Es sei $\underline{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{x}' = (x'^1, \dots, x'^n)$; dann gilt in Matrixschreibweise

$$\underline{x}' = \underline{\Lambda} \underline{x} + \underline{a}, \quad \underline{\Lambda} = (\lambda^i_j), \quad \underline{a} = (a^1, \dots, a^n). \quad (1.1)$$

Die Komponenten $\underline{v} := (v^1, \dots, v^n)$ eines Vektors $v \in E$ transformieren sich dagegen homogen:

$$\underline{v}' = \underline{\Lambda} \underline{v}. \quad (1.2)$$

Ein Euklidischer Raum ist ein spezieller affiner Raum.

Definition 1.3: Ist auf dem "Differenzraum" E eines affinen Raumes $(M, E, +)$ ein inneres Produkt (\cdot, \cdot) definiert, so ist M ein Euklidischer Raum und E ist ein Euklidischer Vektorraum.

Der Abstand zwischen zwei Punkten $p, q \in M$ ist definiert durch

$$d(p, q) := |\vec{pq}|, \quad |v| = \sqrt{(v, v)} \quad \text{für } v \in E. \quad (1.3)$$

Definition 1.4: Ein Cartesisches (Euklidisches) Koordinatensystem ist ein affines Koordinatensystem $(0; e_1, \dots, e_n)$ mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Bezüglich eines solchen Systems seien x^i und y^i die Koordinaten von p bzw. q . Dann gilt

$$d(p, q) = |\vec{0p} - \vec{0q}| = \left| \sum (x^i - y^i) e_i \right| = \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}. \quad (1.4)$$

Die Beziehung zwischen den Koordinaten eines Punktes bezüglich zwei Cartesischen Koordinatensystemen lautet

$$\underline{x}' = R\underline{x} + \underline{a}, \quad (1.5)$$

mit

$$R \in O(n), \quad \text{d.h.} \quad R^T R = R R^T = 1. \quad (1.6)$$

Daraus folgt insbesondere $\text{Det } R = \pm 1$. Die Transformation (1.5) ist bestimmt durch das Paar (\underline{a}, R) . Alle diese Transformationen bilden in natürlicher Weise eine Gruppe, die sog. Euklidische Bewegungsgruppe. Um das Multiplikationsgesetz zu definieren, betrachten wir die Zusammensetzung von zwei Transformationen: Sei

$$\underline{x}' = R\underline{x} + \underline{a}, \quad \underline{x}'' = R'\underline{x}' + \underline{a}',$$

so gilt

$$\underline{x}'' = R'(R\underline{x} + \underline{a}) + \underline{a}' = R'R\underline{x} + (R'\underline{a} + \underline{a}').$$

Der Zusammensetzung der beiden Transformationen entspricht deshalb das Multiplikationsgesetz

$$(\underline{a}', R') (\underline{a}, R) = (\underline{a}' + R'\underline{a}, R'R) . \quad (1.7)$$

Verifiziere die Gruppenaxiome (Einselement, Existenz eines Inversen, Assoziativgesetz).

Wir sagten: der Raum wird als dreidimensionaler Euklidischer Raum idealiert. Damit ist folgendes gemeint. Wir denken uns ein Bezugssystem gegeben, welches durch einen geeigneten starren Körper (etwa die Wände eines Laboratoriums) repräsentiert wird. In einem solchen werden Längen mit Hilfe von Massstäben gemessen (als Längeneinheit können wir z.B. die Wellenlänge der roten Cd-Linie verwenden). Mit Hilfe von starren Körpern und Massstäben können wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem aufbauen. Ob die mit Hilfe der Massstäbe gemessenen Abstände die Formel (1.4) erfüllen, ist damit auch eine empirische Frage (siehe auch die Uebungen). Einstein drückte dies so aus:

"Insofern die Geometrie als die Lehre von den Gesetzmässigkeiten der gegenseitigen Lagerung praktisch starrer Körper aufgefasst wird, ist sie als der älteste Zweig der Physik anzusehen!"

Die Erfahrung zeigt, dass der dreidimensionale Euklidische Raum ein sehr gutes Modell für den physikalischen Raum ist. Die erste (?) empirische Ueberprüfung der Euklidischen Geometrie wurde von Gauss durchgeführt. Erst die Allgemeine Relativitätstheorie ersetzt dieses Modell durch ein besseres.

1.2 Inertialsysteme, absolute Zeit, Galilei Transformationen

Das Trägheitsgesetz von Galilei zeichnet eine Klasse von Bezugssystemen aus.

Definition 1.5: Jedes Bezugssystem, gegen welches die Bahnen von drei vom gleichen Punkt nach verschiedenen (nicht in einer Ebene liegenden) Richtungen fortgeschleuderten, dann aber sich selbst überlassenen Massenpunkten geradlinig sind, heisst Inertialsystem.

Aus Erfahrung wissen wir: (i) Es gibt solche Bezugssysteme. (ii) Gegen ein Inertialsystem ist auch die Bahn jedes anderen, sich selbst überlassenen Massenpunktes geradlinig. In diesen Erfahrungen drückt sich ein Teil des Trägheitsgesetzes aus.

Relativ zu einem Inertialsystem benutzen wir eine Inertialzeitskala im Sinne folgender

Definition 1.6: Inertialzeitskala heisst jede Zeitskala, nach der ein sich selbst überlassener, bewegter Massenpunkt in einer Inertialbahn gleiche Strecken in gleichen Zeiten zurücklegt.

Aus Erfahrung wissen wir: Nach einer Inertialzeitskala legt auch jeder andere, sich selbst überlassene Massenpunkt (immer vorausgesetzt, dass sich seine inneren Eigenschaften zeitlich nicht ändern) gleiche Strecken in gleichen Zeiten zurück.

Die im Anschluss an die beiden letzten Definitionen ausgesprochenen Erfahrungen drücken das Trägheitsgesetz aus: In einem Inertialsystem bewegt sich ein unbeeinflusster Massenpunkt relativ zu einer Inertialzeitskala gleichförmig und geradlinig.

Eine Atomuhr legt in beliebig guter Näherung eine Inertialzeitskala fest. Damit wird die Zeit zu einem 1-dimensionalen Euklidischen Raum, dessen natürliche Koordinate (bestimmt bis auf eine lineare Transformation $t \rightarrow at + b$) die Inertialzeit angibt. Das von Kopernikus in die Astronomie eingeführte, gegen den Schwerpunkt des Planetensystems ruhende, nach den Fixsternen orientierte räumliche Bezugssystem ist mit grosser Genauigkeit ein Inertialsystem. (Mit den heutigen astronomischen Kenntnissen kann man noch bessere Systeme konstruieren.)

Absolute Zeit

In der "vor-relativistischen" Mechanik wird angenommen, dass die Zeit absolut ist, d.h., dass es einen objektiven Sinn hat, von zwei räumlich distanten Ereignissen zu sagen sie seien gleichzeitig. Diese Idealisierung ist sinnvoll, solange man die Lichtgeschwindigkeit als praktisch unendlich ansehen kann. Dann hat man die Möglichkeit, distante Uhren zu synchronisieren. Die Spezielle Relativitätstheorie wurzelt in der Einsicht, dass der absolute Zeitbegriff für elektromagnetische Vorgänge und für die Mechanik hoher Geschwindigkeiten eine unstatthafte Idealisierung ist.

In dieser Vorlesung wollen wir am absoluten Zeitbegriff festhalten. Die Zerlegung der Mannigfaltigkeit M der Ereignisse in Schichten gleicher Zeit kann als kausale Struktur von M interpretiert werden. Die "Hyperebene" $\{t(e) = \text{const}\}$ durch ein Ereignis e separiert die kausale Zukunft (oder den Einflussbereich von e) von seiner kausalen Vergangenheit. Die

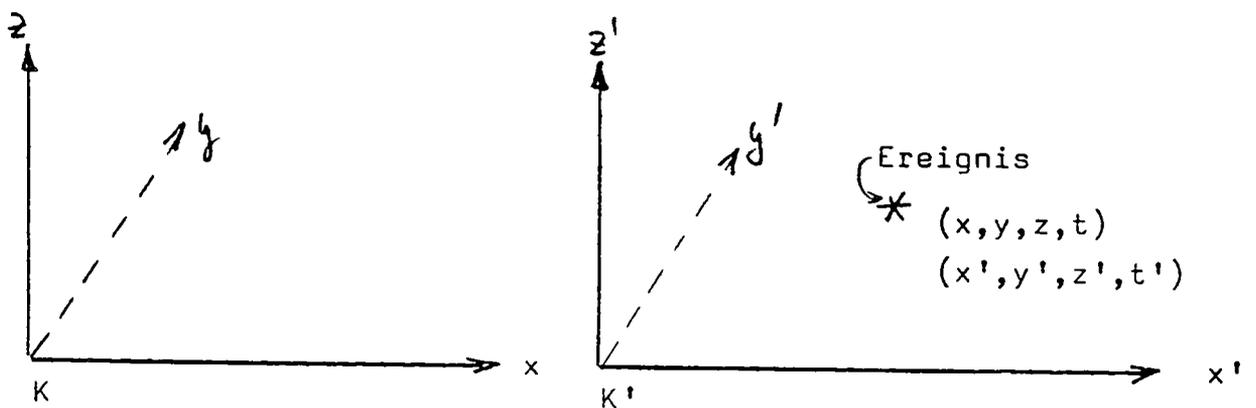
Schichtung in Gleichzeitigkeit ermöglicht die Darstellung der ontologischen Idee, dass sich die äussere Welt in der Zeit entwickelt: der gegenwärtige Zustand der Welt besteht in der Verteilung der Materie in der Hyperebene jetzt und die Sequenz der Verteilungen in diesen Hyperebenen beschreibt in einem objektiven Sinn (unabhängig vom speziellen Beobachter) die Geschichte des materiellen Universums.

Newton stellte sich vor, dass auch der Raum absolut ist, dass es also einen objektiven Sinn hat, von zwei Ereignissen zu verschiedenen Zeiten zu sagen sie fänden am gleichen Ort statt. Bis zu Einstein hat aus begreiflichen Gründen niemand die objektive Bedeutung der Gleichzeitigkeit in Frage gestellt. Aber schon früh wurde auf der Basis der Relativität der Bewegungen die absolute Bedeutung der Ruhe und des nichtrotierenden Zustandes angefochten. Hier sind vor allem Berkley, Huyghens und Leibniz zu erwähnen. Newtons berühmte Diskussion des Eimerversuchs kann die Annahme rechtfertigen, dass Rotation dynamisch eine absolute Bedeutung hat. Für den absoluten Raum von Newton gibt es aber keine mechanischen Gründe, denn die Gesetze der Mechanik erlauben es nicht (siehe Abschnitt 1.5), Ruhe von gleichförmiger Bewegung zu unterscheiden.

Galilei Transformationen

Wir untersuchen nun den Uebergang von einem Inertialsystem K auf ein zweites Inertialsystem K' . In beiden Bezugssystemen sei je ein Cartesisches Koordinatensystem gewählt. Wir betrachten zunächst eine spezielle Situation (vgl. Fig.), bei

der sich K' in der x -Richtung von K mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt und die Cartesischen Achsen von K' bei der Bewegung parallel zu denjenigen von K bleiben. Ferner mögen die beiden Systeme für $t = t' = 0$ zusammenfallen. (Wie bereits abgemacht, sollen in beiden Systemen dieselben Raum- und Zeit-Massstäbe benutzt werden.)



Ein Ereignis, wie das Aufleuchten einer Lampe, habe die Raum-Zeit Koordinaten (x, y, z, t) bezüglich K und (x', y', z', t') bezüglich K' . Die klassischen ("common sense") Beziehungen zwischen den beiden Koordinatensätzen sind durch die spezielle Galileitransformation

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, & y' &= y, & z' &= z, \\t' &= t\end{aligned}$$

(1.8)

gegeben. Die letzte Zeile drückt den absoluten Charakter der Zeit aus.

Wir betrachten nun noch allgemeinere Galileitransformationen, bei denen die Achsen von K' gegenüber denjenigen von K gedreht sind, die konstante Translationsgeschwindigkeit

eine allgemeine Richtung hat und der Koordinaten- sowie der Zeit-Ursprung verschoben sind. An Stelle von (1.8) haben wir das Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= R\underline{x} + \underline{v}t + \underline{a} \\ t' &= t + b . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dabei ist R eine Drehung: $R^T R = 1$. Die Galileitransformation (1.9) ist charakterisiert durch $g = (R, \underline{v}, \underline{a}, b)$. Die Menge dieser Transformationen bildet eine Gruppe mit der Identität $(1, \underline{0}, \underline{0}, 0)$, dem Multiplikationsgesetz (Zusammensetzung von zwei Galileitransformationen)

$$g_1 g_2 = (R_1 R_2 , R_1 \underline{v}_2 + \underline{v}_1 , R_1 \underline{a}_2 + \underline{v}_1 b_2 + \underline{a}_1 , b_1 + b_2)$$

und dem Inversen

$$g^{-1} = (R^{-1} , -R^{-1} \underline{v} , -R^{-1} \underline{a} + R^{-1} \underline{v} b , -b) .$$

Verifiziere, dass alle Gruppenaxiome erfüllt sind.

Diese Gruppe ist isomorph zur Gruppe aller reellen 5×5 Matrizen der Form (vgl. Uebungen) :

$$\begin{pmatrix} R & \underline{v} & \underline{a} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1.10}$$

Falls $R \in SO(3) = \{ R \mid R^T R = 1 , \det R = 1 \}$ wird diese Gruppe die eigentliche orthochrone Galileigruppe G_+^{\uparrow} genannt. Die volle Galileigruppe G wird durch G_+^{\uparrow} , sowie die Raum- und Zeitspiegelungen,

$$\begin{aligned} P: (\underline{x}, t) &\longrightarrow (-\underline{x}, t) , \\ T: (\underline{x}, t) &\longrightarrow (\underline{x}, -t) , \end{aligned}$$

erzeugt. Die Galileigruppe hat, unter anderen, die folgenden Untergruppen:

- (a) Die Euklidische Bewegungsgruppe, bestehend aus den Elementen $(R, 0, \underline{a}, 0)$.
- (b) Die Menge der speziellen Galileitransformationen (3-parametrische Abelsche Untergruppe)

$$g(\underline{v}) = (1, \underline{v}, 0, 0) .$$

Das Additionsgesetz der Geschwindigkeiten drückt sich folgendermassen aus

$$g(\underline{v}_1)g(\underline{v}_2) = g(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) .$$

Die Galileigruppe wird in dieser Vorlesung eine wichtige Rolle spielen.

1.3 Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten

Wir betrachten einen Massenpunkt, der sich in der Zeit durch den Raum bewegt. Relativ zu einem Bezugssystem mit Cartesischen Achsen sei die Bahn $t \mapsto \underline{x}(t)$. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{x}}(t) := \frac{d\underline{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) .$$

Die Beschleunigung ist

$$\underline{b}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{x}}(t) .$$

Die Bewegung eines Massenpunktes (allgemeiner eines Systems von Massenpunkten) ist im folgenden Sinne deterministisch: Die gesamte Bewegung ist eindeutig festgelegt, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 die Position $\underline{x}(t_0)$ und die Geschwindigkeit $\dot{\underline{x}}(t_0)$ des Teilchens gegeben ist. Diese Grössen bestimmen

insbesondere die Beschleunigung. Es gibt also eine Funktion $\underline{f} : U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass

$$\ddot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t), t). \quad (1.11)$$

Umgekehrt folgt aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, dass die Funktion \underline{f} und die Anfangsdaten $\underline{x}(t_0), \dot{\underline{x}}(t_0)$ die Bewegung eindeutig bestimmen.

Die Beschreibung von Bewegungsgleichungen durch differentielle Gesetze (Differentialgleichungen) geht auf Newton zurück und hat sich als eine der tragfähigsten Ideen der theoretischen Physik erwiesen. Man kann sich heute kaum noch vorstellen, wie schwierig damals die Konzeption von Differentialgesetzen war. Es war ja nicht nur die Idee dafür nötig, sondern auch die Entwicklung eines mathematischen Kalküls, der vorher höchstens in Rudimenten vorlag. Alle bis anhin bekannten Gesetze (z.B. die Keplergesetze) waren in unserer heutigen Sprechweise Integralgesetze, die also die Bahn als Ganzes betreffen.

Die folgende Bemerkung erscheint mir sehr wesentlich. Differentialgesetze beschreiben nicht die Wirklichkeit, da die Anfangsbedingungen als zufällig erachtet werden. Sie betten die Wirklichkeit vielmehr in ein Reich der Möglichkeiten ein. So kann die Newtonsche Theorie keine Erklärung für die Titius-Bodesche Regel geben, welche viele Planetenabstände von der Sonne erstaunlich gut wiedergibt.

Etwa am Beispiel der elastischen Feder sieht man, dass die rechte Seite von (1.11) nur dann von der Natur des Massen-

punktes unabhängig ist, wenn die linke Seite mit einem Faktor multipliziert wird, der von den inneren Eigenschaften des Probekörpers, aber nicht von der Stärke der Feder abhängt. [Dies gilt nur, wenn wir die Bewegung auf ein Inertialsystem beziehen, was im folgenden vorausgesetzt sei. Beschleunigte Bezugssysteme werden in Abschnitt 2.4 besprochen.] Diese innere Eigenschaft nennt man die träge Masse $m > 0$ des Körpers. [Eine genauere Definition der trägen Masse folgt weiter unten.]

Damit erhält man das Newtonsche Bewegungsgesetz für einen Massenpunkt:

$$m\ddot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t), t). \quad (1.12)$$

Die rechte Seite ist die Kraft und beschreibt die Wechselwirkung des Massenpunktes mit der Aussenwelt.

Das Problem der Mechanik besteht in folgendem: Entweder kennt man die Bewegung und sucht die Funktion \underline{F} im Bewegungsgesetz, oder man kennt die Kräfte und sucht die Bewegung. Im letzteren Fall handelt es sich darum, ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu lösen. Diese mathematische Aufgabe ist i.a. unlösbar schwierig. Die Reichhaltigkeit der Lösungsmannigfaltigkeit, auch von einfachen nicht-linearen Differentiagleichungen, versetzt uns immer wieder neu in Erstaunen und wird noch viele Generationen faszinieren (und beschäftigen).

Beispiel: Die Bewegungsgleichung für einen Planeten

Als Beispiel für die erste Aufgabe leiten wir das Newtonsche Gravitationsgesetz aus den Keplerschen Gesetzen ab. (Dies wird in den Lehrbüchern kaum durchgeführt.)

Es ist bekannt, dass Kepler 1609 aus den umfangreichen und sehr genauen Beobachtungen von Tycho Brahe die beiden folgenden Gesetze abstrahiert hat:

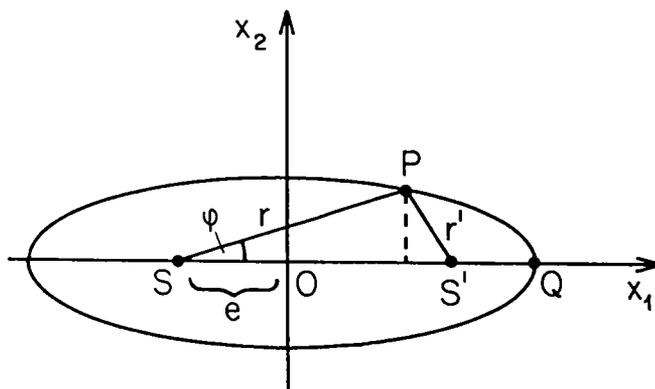
1. Keplersches Gesetz: Die Bahn eines jeden Planeten ist eben, und zwar eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersches Gesetz: Der Radiusvektor $\underline{x}(t)$ von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen ("Flächensatz").

Für die Trajektorie in der Bahnebene führen wir die folgenden Bezeichnungen ein (vergl. Fig. 1.1)

$a := |\vec{OQ}|$: grosse Halbachse, $e := |\vec{OS}|$;

$\mathcal{E} = e/a$: Exzentrizität ($\mathcal{E} < 1$) .



In Polarkoordinaten ($x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$) gilt

$$r' = [(r \sin \varphi)^2 + (2e - r \cos \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.13)$$

Die Ellipsengleichung lautet: $r + r' = 2a$. Durch Elimination von r' folgt die Parameterdarstellung der Bahnkurve:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad p = a(1 - \varepsilon^2). \quad (1.14)$$

Aus dem 1. Keplerschen Gesetz entnehmen wir, dass die Richtung des Drehimpulses

$$\underline{L}(t) = m \underline{x}(t) \wedge \dot{\underline{x}}(t)$$

konstant bleibt, nämlich senkrecht zur Bahnebene. Aus dem

2. Keplerschen Gesetz folgt andererseits die Konstanz von $|\underline{L}|$.

Es ist nämlich

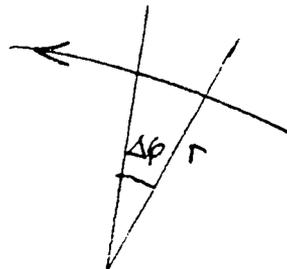
$$\underline{x} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0),$$

$$\dot{\underline{x}} = (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi, 0),$$

$$\begin{aligned} |\underline{x} \wedge \dot{\underline{x}}| &= r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \\ &= r^2 \dot{\varphi}; \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad |\underline{L}| = m r^2 \dot{\varphi}. \quad (1.15)$$

Die Flächengeschwindigkeit ist andererseits



$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} =: C = \text{const.}$$

Deshalb gilt

$$|\underline{L}| = 2m \frac{df}{dt} = 2m C. \quad (1.16)$$

Wir zeigen nun die Gültigkeit des folgenden Satzes.

Satz 1.1: Die beiden ersten Keplerschen Gesetze implizieren für jede Planetenbahn $\underline{x}(t)$ die Gleichung

$$\ddot{\underline{x}}(t) = - \frac{4C^2}{p} \frac{\underline{x}(t)}{|\underline{x}(t)|^3} . \quad (1.17)$$

Bemerkung: Obschon nach (1.16) $4C^2 = |\underline{x} \wedge \dot{\underline{x}}|^2$ gilt, ist (1.17) nur vom Typ (1.12), wenn man zeigen kann, dass p eine Funktion von $\underline{x}, \dot{\underline{x}}$ und t ist. Dies wird sich aber erst als Folge des 3. Keplerschen Gesetzes erweisen.

Beweis von Satz 1.1: Es sei $\underline{e} = \underline{x}/|\underline{x}|$. Dann folgt aus $(\underline{e}, \underline{e}) = 1$:

$$(\underline{e}, \dot{\underline{e}}) = 0 \implies (\underline{e}, \ddot{\underline{e}}) + (\dot{\underline{e}}, \dot{\underline{e}}) = 0 . \quad (1.18)$$

Ferner ergibt sich aus der Konstanz von \underline{L} :

$$0 = \dot{\underline{L}} = m \underline{x} \wedge \ddot{\underline{x}} \implies \ddot{\underline{x}} = (\ddot{\underline{x}}, \underline{e}) \underline{e} . \quad (1.19)$$

Durch Differentiation von $\underline{x} = r \underline{e}$ erhält man

$$\ddot{\underline{x}} = \ddot{r} \underline{e} + 2\dot{r} \dot{\underline{e}} + r \ddot{\underline{e}} . \quad (1.20)$$

Aus (1.18) und (1.20) folgt $(\ddot{\underline{x}}, \underline{e}) = \ddot{r} - r(\dot{\underline{e}}, \dot{\underline{e}})$. Ferner ist $\underline{e} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, also $\dot{\underline{e}} = (-\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{\varphi} \cos \varphi)$ und daher nach dem Flächensatz (1.16)

$$(\ddot{\underline{x}}, \underline{e}) = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - 4C^2/r^3 . \quad (1.21)$$

Aus (1.14) erhalten wir mit (1.16)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= - p \frac{\epsilon \dot{\varphi} \sin \varphi}{(1 - \epsilon \cos \varphi)^2} = - 2 \frac{\epsilon C \sin \varphi}{p} , \\ \ddot{r} &= - \frac{2 \epsilon C \dot{\varphi} \cos \varphi}{p} = - \frac{4 \epsilon C^2 \cos \varphi}{p r^2} . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Aus (1.19) und (1.21) folgt

$$\ddot{\underline{x}} = (\ddot{\underline{x}}, \underline{e}) \underline{e} = (\ddot{r} - 4C^2/r^3) \underline{e} .$$

Mit (1.22) und (1.14) kommt nun

$$\ddot{\underline{x}} = \frac{4C^2}{r^2} \left(-\frac{\epsilon \cos\varphi}{p} - \frac{1}{r} \right) \underline{e} = -\frac{4C^2}{p} \frac{\underline{x}}{r^3} . \quad \square \quad (1.23)$$

Um zu einer Differentialgleichung zu kommen, benötigen wir eine Beziehung zwischen den Parametern der Bahnen verschiedener Planeten. Eine solche hat Kepler nach langem Suchen 1618 gefunden:

3. Keplersches Gesetz: Für alle Planeten (des Sonnensystems) verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten T wie die Kuben der grossen Halbachsen a :

$$T^2/a^3 =: D = \text{Konstante des Sonnensystems.} \quad (1.24)$$

Aus (1.16) folgt $CT = \text{Fläche der Ellipse} = \kappa a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}$
 $= \kappa a^{3/2} p^{1/2}$ [vgl. (1.14)], also

$$T^2/a^3 = \frac{\kappa^2 a^3 p / C^2}{a^3} = \frac{\kappa^2 p}{C^2} = D . \quad (1.25)$$

Das letzte Gleichheitszeichen gibt mit (1.17) den

Satz 1.2: Als Folge der drei Keplergesetze gilt für die Planetenbahnen um die Sonne die Differentialgleichung

$$\ddot{\underline{x}} = -\frac{4\kappa^2}{D} \frac{\underline{x}(t)}{|\underline{x}(t)|^3} . \quad (1.26)$$

Umgekehrt werden wir später die Keplerschen Gesetze aus der Differentialgleichung (1.26) gewinnen. Neben den Kepler-Ellipsen hat aber die Differentialgleichung (1.26), wie wir in Abschnitt 2.3 sehen werden, noch andere Lösungen (Parabeln und Hyperbeln). Wir betrachten seit Newton das Differentialgesetz (1.26) als das fundamentale Gesetz und die Keplerschen

Gesetze als zugehörige Integralgesetze. Dann liegt es nahe, auch die anderen Lösungen von (1.26) als physikalisch realisierbare Bewegungen zuzulassen. Diese Vorhersage hat sich in der Astronomie bekanntlich glänzend bestätigt.

Newton ging aber noch wesentlich weiter und entwickelte die kühne Vorstellung der universellen Gravitation. Unter Benutzung des Prinzips Actio = Reactio postulierte er:

Es gibt eine Konstante $G > 0$ (Newtonsche Gravitationskonstante), so dass alle N -Teilchensysteme mit Massen m_i und Bahnen $\underline{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$, $N \geq 2$) bei rein gravitativer Wechselwirkung Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems der Himmelsmechanik sind:

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = - G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\underline{x}_i - \underline{x}_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^3} . \quad (1.26')$$

Für $N = 2$ erhält man (1.26), falls $\underline{x}_\odot = 0$ gesetzt wird. [Konsequenterweise ergibt sich (1.26) aus (1.26') für die Relativbewegung; vgl. § 2.3.]

Mit der mathematischen Formulierung des Gravitationsgesetzes konnte Newton die wichtigsten damals bekannten Erscheinungen der Planetenbewegung beschreiben und zeigen, dass die Physik der Bewegungsabläufe auf der Erde und die Physik der Planetenbewegung ein und dasselbe ist. Diese Einsicht hatte er in den ersten Monaten des Jahres 1685 im Alter von zweiundvierzig Jahren.

* * *

Allgemeiner betrachten wir im folgenden Bewegungsgleichungen der Form

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \dot{\underline{x}}_1, \dots, \dot{\underline{x}}_N, t) \quad (1.27)$$

(i = 1, 2, ..N) .

Die \underline{F}_i sind die Kräfte, welche auf die Massenpunkte wirken. Sie hängen i.a. von den Koordinaten, den Geschwindigkeiten und der Zeit ab, nicht aber von höheren Ableitungen der Koordinaten.

Die Gleichungen (1.27) nennt man die Newtonschen Bewegungsgleichungen. Bei bekannten Kräften stellen sie ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung dar. Explizite (analytische) Lösungen, ja sogar bloss qualitative Aussagen sind nur in ganz wenigen Fällen möglich. Schon Newton schrieb im Zusammenhang mit dem Bewegungsproblem (1,26'):

"Es würde, wenn ich mich nicht irre, die Grenzen des menschlichen Erkenntnisvermögens übersteigen, alle diese Ursachen der Bewegung zugleich zu berücksichtigen und diese Bewegungen durch genaue Gesetze zu beschreiben, die praktisch durchführbare Berechnungen erlauben."

Die Erfahrung lehrt, dass in vielen Fällen die Kräfte nur von den Positionen $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N)$, den sog. Konfigurationen, der Massenpunkte abhängen. Dann kann man die Kräfte statisch bestimmen. Die trägen Massen m_i in (1.27) bestimmen deshalb die dynamische Wirkung der Kräfte. Sie bestimmen, wie gross die Beschleunigung ist, die eine statische Kraft an einem Massenpunkt erzeugt.

Ein mechanisches Modell ist durch Funktionen \underline{F}_i bestimmt. Wir betrachten speziell den Fall wo \underline{F}_i sich in

folgender Weise zusammensetzt:

$$\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(in)} + \underline{F}_i^{(ex)} . \quad (1.28)$$

Die äussere Kraft $\underline{F}_i^{(ex)}$ soll dabei nur von \underline{x}_i , $\dot{\underline{x}}_i$ und t abhängen, d.h. sie soll von \underline{x}_j und $\dot{\underline{x}}_j$ mit $j \neq i$ unabhängig sein. Die innere Kraft $\underline{F}_i^{(in)}$ soll andererseits nur von der relativen Konfiguration des Systems abhängig sein. Im folgenden betrachten wir überdies für $\underline{F}_i^{(in)}$ meistens Superpositionen von Zwei körperkräften

$$\underline{F}_i^{(in)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, t) = \sum_{k \neq i} \underline{F}_{ik}(\underline{x}_i - \underline{x}_k, t) , \quad (1.29)$$

wo \underline{F}_{ik} die Kraft bezeichnet, welche der Punkt k auf den Punkt i ausübt. \underline{F}_{ik} soll überdies eine Zentralkraft sein:

$$\underline{F}_{ik}(\underline{x}, t) = f_{ik}(|\underline{x}|, t) \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} , \quad (1.30)$$

$$f_{ik} = f_{ki} .$$

Es gilt dann das Prinzip: actio = reactio, d.h.

$$\underline{F}_{ik}(\underline{x}_i - \underline{x}_k, t) = - \underline{F}_{ki}(\underline{x}_k - \underline{x}_i, t) . \quad (1.31)$$

Von diesem Typus sind die Gravitationskräfte. In (1,26') ist *)

$$f_{ik}(r, t) = - \frac{Gm_i m_k}{r^2} . \quad (1.32)$$

*) Was Newton dazu befähigte, über das Ein-Körper-System hinauszukommen, war die konsequente Anwendung seines dritten Bewegungsgesetzes: actio = reactio. Dieses Gesetz ist vielleicht das originellste seiner drei Bewegungsgesetze. (Vgl. die Einleitung zum elften Kapitel der Principia.)

Die äusseren Kräfte rühren in der Regel von Massen her, deren Bewegung bekannt ist und die nicht zum System gerechnet werden. [Im Prinzip könnte man diese Massen auch zum System zählen, womit die äusseren Kräfte zu inneren werden.]

Ein System, auf das keine äusseren Kräfte wirken, heisst mechanisch abgeschlossen. Für ein solches lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen (1.27) nach (1.29):

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = \sum_{k \neq i} \underline{F}_{ik}(\underline{x}_i - \underline{x}_k, t) . \quad (1.33)$$

Zentralkräfte besitzen ein Potential:

$$\underline{F}_{ik}(\underline{x}, t) = - \text{grad } V_{ik}(|\underline{x}|, t) ,$$

wobei

$$V_{ik}(r, t) = - \int_{r_0}^r f_{ik}(s, t) ds = V_{ki}(r, t) . \quad (1.34)$$

Für die Gravitationskräfte lautet das Potential zu (1.32)

$$V_{ik} = - \frac{G m_i m_k}{r} . \quad (1.35)$$

1.4 Erhaltungssätze für abgeschlossene Systeme

Wir ziehen nun einige allgemeine Folgerungen aus den Newtonschen Gleichungen (1.33), wobei wir allgemeiner rechts noch äussere Kräfte addieren:

$$m_i \ddot{\underline{x}}_i = \sum_{k \neq i} \underline{F}_{ik}(\underline{x}_i - \underline{x}_k, t) + \underline{F}_i^{(ex)}(\underline{x}_i, \dot{\underline{x}}_i, t) \equiv \underline{F}_i(\dots) . \quad (1.36)$$

A. Impulssatz

Wir definieren zunächst den Impuls des i^{ten} Massenpunktes durch

$$\underline{p}_i = m_i \dot{\underline{x}}_i. \quad (1.37)$$

Dann gilt, da m_i konstant ist, nach (1.36)

$$\dot{\underline{p}}_i = \underline{F}_i.$$

Summieren wir diese Gleichung über i , so erhalten wir mit (1.31) für den Gesamtimpuls,

$$\underline{p} := \sum_{i=1}^N \underline{p}_i \quad (1.38)$$

die Gleichung

$$\dot{\underline{p}} = \sum_i \underline{F}_i^{(ex)}. \quad (1.38')$$

Es gilt also der

Satz 1.3: Die Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äusseren Kräfte. Für ein mechanisch abgeschlossenes System bleibt der Impuls konstant.

Wir formulieren diese Aussage wie folgt um: Sei \underline{x} der Schwerpunkt des Systems,

$$\underline{x} := \frac{\sum_i m_i \underline{x}_i}{M}, \quad M := \sum_i m_i \quad (= \text{Gesamtmasse}), \quad (1.39)$$

dann folgt aus (1.37) und (1.38') für ein abgeschlossenes System

$$\ddot{\underline{x}} = 0 \implies \dot{\underline{x}} = \frac{\sum_i m_i \underline{v}_i}{M} = \text{const}, \quad (1.40)$$

d.h.: Der Schwerpunkt bewegt sich für ein abgeschlossenes System geradlinig und gleichförmig (Schwerpunktsatz). Für die Gültig-

keit dieses Schwerpunktsatzes ist das Prinzip actio = reactio wesentlich. Aus (1.40) folgt durch Integrieren

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{v} \quad , \quad \underline{v} = \frac{\sum m_i \underline{v}_i}{M} \quad ; \quad (1.41)$$

$\underline{x}_0, \underline{v}$ sind - für ein abgeschlossenes System - Integrale der Bewegung.

Anwendung: Aus der Konstanz von \underline{v} folgt für ein Zweiteilchen-System

$$m_1[\underline{v}_1(t') - \underline{v}_1(t)] + m_2[\underline{v}_2(t') - \underline{v}_2(t)] = 0 .$$

Aus dieser Beziehung für beliebige Zeiten t und t' kann man das Verhältnis m_2/m_1 der Massen bestimmen.

B. Energiesatz

Nun multiplizieren wir (1.36) skalar mit $\underline{v}_i = \dot{\underline{x}}_i$ und summieren über i :

$$\begin{aligned} \sum_i m_i (\underline{v}_i, \dot{\underline{v}}_i) &= \sum_{i \neq j} (\dot{\underline{x}}_i, \underline{F}_{ij}) + \sum_i (\dot{\underline{x}}_i, \underline{F}_i^{(ex)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\dot{\underline{x}}_i - \dot{\underline{x}}_j, \underline{F}_{ij}) + \sum_i (\dot{\underline{x}}_i, \underline{F}_i^{(ex)}) . \end{aligned} \quad (1.42)$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen wurde actio = reactio benutzt. Für die Form (1.30) der inneren Kräfte folgt nach (1.34)

$$\underline{F}_{ij}(\underline{x}_i - \underline{x}_j, t) = - \text{grad } V_{ij}(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) , \quad V_{ij} = V_{ji} , \quad (1.43)$$

wobei wir angenommen haben, dass \underline{f}_{ij} (und damit V_{ij}) nicht von t abhängt.

Nun gilt

$$(\dot{\underline{x}}_i - \dot{\underline{x}}_j, \underline{F}_{ij}) = - \frac{d}{dt} V_{ij}(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) . \quad (1.44)$$

Dies sieht man so: Die rechte Seite ist nach der Kettenregel (V'_{ij} bezeichnet die Ableitung von V_{ij})

$$\frac{d}{dt} V_{ij}(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) = V'_{ij} \frac{d}{dt} |\underline{x}_i - \underline{x}_j| = V'_{ij} \frac{(\dot{\underline{x}}_i - \dot{\underline{x}}_j, \underline{x}_i - \underline{x}_j)}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} .$$

Andererseits ist

$$\text{grad } V_{ij}(|\underline{x}|) = V'_{ij} \text{grad } |\underline{x}| = V'_{ij} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} .$$

Deshalb gilt

$$\frac{d}{dt} V_{ij}(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) = (\text{grad } V_{ij}(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|), \dot{\underline{x}}_i - \dot{\underline{x}}_j) .$$

Mit (1.43) folgt daraus die Behauptung (1.44). Benutzen wir (1.44) in (1.42), sowie $(\underline{v}_i, \dot{\underline{v}}_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \underline{v}_i^2$, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_i m_i \underline{v}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \right] = \sum_i (\dot{\underline{x}}_i, \underline{F}_i^{\text{ex}}) . \quad (1.45)$$

In dieser Gleichung ist $\frac{1}{2} \sum m_i \underline{v}_i^2$ die kinetische Energie des Systems, welche wir oft mit T bezeichnen werden,

$$T := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \underline{v}_i^2 ,$$

(T ist die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massenpunkte.) Die Grösse

$$V := \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} = \sum_{i < j} V_{ij}$$

ist die potentielle Energie der Wechselwirkung. Schliesslich ist der Ausdruck in der eckigen Klammer die innere Energie des

Systems. In Worten besagt die Gleichung (1.45):

Satz 1.4: Die zeitliche Änderung der inneren Energie ist gleich der Arbeitsleistung der äusseren Kräfte. Für ein mechanisch abgeschlossenes System ist die innere Energie konstant.

Aus (1.45) ergibt sich, dass Kräfte, welche senkrecht zur Geschwindigkeit sind, keine Arbeit leisten (ein Beispiel ist die Lorentzkraft). Man nennt sie deshalb "wattlos". Die anderen äusseren Kräfte nennt man treibende Kräfte. Falls letztere unabhängig von der Geschwindigkeit sind und sich überdies aus einem Potential herleiten lassen,

$$\underline{F}_i^{(ex)} = - \text{grad } U_i \quad (1.46)$$

so ist die Arbeit unabhängig vom äusseren Weg *) :

$$\int_{\underline{x}_1}^{\underline{x}_2} (\underline{F}, d\underline{x}) = U(\underline{x}_1) - U(\underline{x}_2), \quad (1.47)$$

Besitzen die äusseren treibenden Kräfte im hier erklärtem Sinne ein Potential so kann (1.45) wie folgt geschrieben werden

$$T + V + \sum_i U_i =: E = \text{const.}, \quad (1.49)$$

E ist die Gesamtenergie des Systems und ist ein weiteres Integral.

Die Systeme, für die wir (1.49) hergeleitet haben, nennt man konservativ. Natürlich ist die Energie nur bis auf eine willkürliche additive Konstante definiert.

Es ist oft nützlich, die innere Energie in die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung und die Energie relativ zum Schwerpunkt zu zerlegen. Dazu führen wir die Relativkoordinaten ein,

*) Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist dies gleichbedeutend mit

$$\text{rot } \underline{F} = 0, \quad (1.48)$$

$$\underline{\xi}_i := \underline{x}_i - \underline{x}$$

und schreiben (beachte $\sum m_i \underline{\xi}_i = 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \dot{\underline{x}}_i^2 + \sum_{i \neq j} v_{ij} (|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) \right) &= \frac{1}{2} (M \dot{\underline{x}}^2 + \sum_i m_i \dot{\underline{\xi}}_i^2 \\ &+ \sum_{i \neq j} v_{ij} (|\underline{\xi}_i - \underline{\xi}_j|)) \equiv T_{\text{trans}} + T_{\text{rel}} + V. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rel}}, \quad (1.50)$$

mit

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{x}}^2, \quad T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\underline{\xi}}_i^2.$$

C. Drehimpulssatz

Schliesslich multiplizieren wir (1.36) vektoriell mit \underline{x}_i und summieren über i :

$$\sum_i m_i \underline{x}_i \wedge \ddot{\underline{x}}_i = \sum_i \underline{x}_i \wedge \underline{F}_i = \sum_i \underline{x}_i \wedge \underline{F}_i^{(\text{ex})} + \sum_{i \neq j} \underline{x}_i \wedge \underline{F}_{ij}. \quad (1.51)$$

Die linke Seite ist

$$\sum_i m_i \underline{x}_i \wedge \ddot{\underline{x}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \underline{x}_i \wedge \dot{\underline{x}}_i.$$

Der letzte Term in (1.51) verschwindet, denn durch Vertauschung der Summationsindizes erhält man mit actio = reactio

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \underline{x}_i \wedge \underline{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\underline{x}_i \wedge \underline{F}_{ij} + \underline{x}_j \wedge \underline{F}_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\underline{x}_i - \underline{x}_j) \wedge \underline{F}_{ij} = 0, \end{aligned}$$

da \underline{F}_{ij} die Richtung von $\underline{x}_i - \underline{x}_j$ hat. Wir erhalten damit aus (1.51) und (1.52)

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \underline{x}_i \wedge \dot{\underline{x}}_i \right) = \sum_i \underline{x}_i \wedge \underline{F}_i^{(ex)} \quad (1.53)$$

Man nennt

$$\underline{L} := \sum_i m_i \underline{x}_i \wedge \dot{\underline{x}}_i \quad (1.54)$$

den Drehimpuls des Systems um den Ursprung des Koordinatensystems. Weiter heisst

$$\underline{D} := \sum_i \underline{x}_i \wedge \underline{F}_i^{(ex)} \quad (1.55)$$

das Drehmoment der äusseren Kräfte. Mit diesen Definitionen lautet (1.53)

$$\boxed{\dot{\underline{L}} = \underline{D}} \quad (1.56)$$

\underline{D} verschwindet für ein abgeschlossenes System. Es gilt also der

Satz 1.5: Für ein abgeschlossenes System ist der Drehimpuls zeitlich konstant (Drehimpulssatz).

Man kann auch \underline{L} und \underline{D} relativ zum Massenschwerpunkt einführen. Dazu multiplizieren wir jetzt (1.36) vektoriell mit $\underline{e}_i = \underline{x}_i - \underline{X}$ und summieren über i :

$$\sum_i m_i \underline{e}_i \wedge \dot{\underline{x}}_i = \sum_i \underline{e}_i \wedge \underline{F}_i \quad (1.57)$$

Nach Definition ist $\sum m_i \underline{e}_i = 0$, so dass man (1.57) auch in der Form

$$\sum_i m_i \underline{e}_i \wedge \ddot{\underline{x}}_i = \sum_i \underline{e}_i \wedge \underline{F}_i$$

schreiben kann. Genau wie oben folgt dann mit

$$\underline{L}_{\text{rel}} := \sum m_i \underline{r}_i \wedge \dot{\underline{r}}_i \quad (1.58)$$

$$\underline{D}_{\text{rel}} := \sum m_i \underline{r}_i \wedge \underline{F}_i^{(\text{ex})} \quad (1.59)$$

die Gleichung

$$\dot{\underline{L}}_{\text{rel}} = \underline{D}_{\text{rel}} . \quad (1.60)$$

Diese Gleichung ist z.B. für die Theorie des starren Körpers wichtig.

Ist $\underline{D}_{\text{rel}} = 0$, z.B. wenn alle $\underline{F}_i^{(\text{ex})}$ verschwinden, so gilt also auch der Drehimpulssatz um den Massenmittelpunkt

$$\dot{\underline{L}}_{\text{rel}} = 0 . \quad (1.61)$$

$\underline{L}_{\text{rel}}$ nennt man auch den inneren Drehimpuls.

Damit haben wir die sog. zehn klassischen Integrale für ein abgeschlossenes System hergeleitet. Diese Erhaltungssätze vereinfachen oft die Integration der Bewegungsgleichung.

1.5. Das Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik

Die folgende Tatsache gehört zu den Alltagserfahrungen: Es ist unmöglich, durch mechanische Experimente innerhalb eines abgeschlossenen Kastens zu entscheiden, ob sich der Kasten in "Ruhe" oder in gleichförmig geradliniger Bewegung befindet. Dies wollen wir an einem Beispiel nachrechnen.

Dazu betrachten wir ein abgeschlossenes System von N Massenpunkten, zwischen denen Zentralkräfte (aber keine äus-

seren Kräfte) wirken. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$m_k \ddot{\underline{x}}_k = \sum_{l \neq k} \underline{F}_{kl} \quad , \quad (l, k: 1, 2, \dots, N) \quad , \quad (1.62)$$

wobei

$$\underline{F}_{kl} = \underline{x}_{kl} f_{kl}(|\underline{x}_{kl}|) \quad , \quad \underline{x}_{kl} := \underline{x}_k - \underline{x}_l \quad . \quad (1.63)$$

Nun behaupte ich: Ist $\underline{x}_k(t)$, $k = 1, \dots, N$, eine Lösung von (1.62), so ist auch die Galileitransformierte Bahn $\hat{\underline{x}}_k(t)$, definiert durch

$$\hat{\underline{x}}_k(\pm t + b) = \pm R \underline{x}_k(t) + \underline{v}t + \underline{a} \quad , \quad (1.64)$$

eine Lösung. In der Tat ist offensichtlich

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{\underline{x}}_k(t) = \pm R \left(\frac{d^2}{dt^2} \underline{x}_k \right) (\pm t - b)$$

und

$$\underline{F}_{kl}(\hat{\underline{x}}_{kl}(t)) = \pm R \underline{F}_{kl}(\underline{x}_{kl}(\pm t - b)) \quad .$$

Aus (1.62) folgt damit die Behauptung.

Die Galileigruppe ist also die Invarianzgruppe der Bewegungsgleichungen (1.62) [An Stelle von (1.62) werden wir später allgemeinere Galileiinvariante Systeme betrachten.]

Die Galileiinvarianz können wir in verschiedener Weise interpretieren:

Passive Interpretation: Wir fassen (1.64) als Transformationsgesetz auf, welches sich daraus ergibt, dass wir ein und dieselbe Bahn relativ zu zwei verschiedenen Inertialsystemen beschreiben.

Aktive Interpretation: Relativ zu einem beliebigen, aber festen Inertialsystem beschreiben $\{\underline{x}_k(t)\}$ und $\{\hat{\underline{x}}_k(t)\}$ zwei verschiedene Bahnen, welche durch eine Galileitransformation auseinander hervorgehen.

Der Inhalt des Gesagten lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

Galileisches Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind für die Mechanik gleichberechtigt. Die Gesetze der Mechanik abgeschlossener Systeme sind invariant unter der Galileigruppe.

1.6. Die Struktur der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit in der Newtonschen Mechanik

"Gegenstand unserer Wahrnehmung sind immer nur Orte und Zeiten verbunden. Es hat niemand einen Ort anders bemerkt als zu einer Zeit, eine Zeit anders als an einem Ort."

H. Minkowski

Das primäre Medium, in dem sich die physikalischen Prozesse abspielen, ist die Mannigfaltigkeit der (elementaren) Ereignisse. Wir wollen uns nun der Struktur dieser Raum-Zeit Mannigfaltigkeit in der Newtonschen Mechanik zuwenden.

Die absolute Bedeutung der gleichförmigen Bewegung beinhaltet unter anderem, dass die Raum-Zeit Mannigfaltigkeit ein affiner Raum ist (vgl. Def. 1.1). Das Postulat der affinen Struktur ist eine präzise Formulierung des Trägheitsgesetzes und betont dessen intrinsische, Koordinaten-unabhängige Bedeutung. Das Trägheitsgesetz ist gerade deshalb so wichtig, weil es die affine Struktur der Raum-Zeit festlegt. Alle weiteren dynamischen Gesetze setzen diese Struktur voraus, führen aber keine Bereicherung der Raum-Zeit Geometrie

ein. In diesem Sinne soll man das Trägheitsgesetz nicht einfach als triviale Konsequenz des 2. Newtonschen Gesetzes auffassen.

Die Struktur der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit in der Newtonschen Mechanik wird durch die Galileigruppe festgelegt, genau so wie die Euklidische Bewegungsgruppe die Struktur des Euklidischen Raumes festlegt. Invariant ausgedrückt ist die Raum-Zeit ein vierdimensionaler affiner Raum, welcher in Schichten gleicher Zeit zerfällt, die ihrerseits dreidimensionale Euklidische Räume sind. Die präzise Definition lautet:

Definition 1.7: Eine Galilei Raum-Zeit ist ein vierdimensionaler affiner Raum $(M, E, +)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Auf dem Differenzraum E existiert eine ausgezeichnete Linearform τ . [Interpretation: Zu zwei Ereignissen $p, q \in M$ ist $\tau(\vec{pq})$ der objektive Zeitunterschied.]
- (ii) Auf dem Unterraum $E_0 := \{ v \in E : \tau(v) = 0 \}$ ist eine positiv definite Bilinearform (\cdot, \cdot) gegeben, die E_0 zu einem Euklidischen Vektorraum macht.

Wir betrachten die Äquivalenzrelation auf M :

$$p \sim q \iff \tau(\vec{pq}) = 0 \quad (\text{d.h. } \vec{pq} \in E_0).$$

Die Äquivalenzklassen bilden die Schichten gleicher Zeit und sind zunächst affine Unterräume ^{*)} mit Differenzraum E_0 .

*) Ein affiner Unterraum von $(M, E, +)$ ist eine Teilmenge $N \subset M$ mit der Eigenschaft, dass die Vektoren \vec{pq} ($p, q \in N$) einen Unterraum F von E bilden.

Da aber E_0 ein Euklidischer Vektorraum ist, sind die Schichten konstanter Zeit sogar Euklidische Räume (siehe Fig. 1.2).

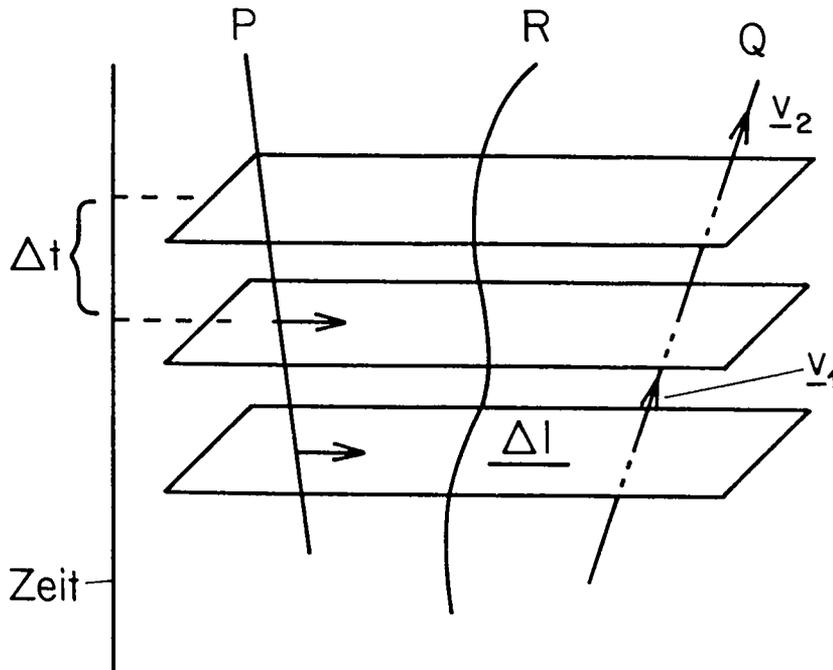


Fig. 1.2. Galilei Raum-Zeit. Absolute Bedeutung haben: gleichförmige Bewegung (P,Q), Faserung in Schichten gleicher Zeit; absolute Ruhe ist aber nicht definiert. Parallelität von 4er-Vektoren ist bedeutungsvoll.

Man kann zeigen, dass die Automorphismengruppe einer Galilei Raum-Zeit isomorph zur Galileigruppe ist (vgl. das Skriptum über spezielle Relativitätstheorie).

Inertialsysteme entsprechen affinen Koordinatensystemen, welche der Struktur der Galilei Raum-Zeit besonders angepasst sind. Diese sog. Galilei-Systeme sind wie folgt definiert:

Definition 1.8: Ein affines Koordinatensystem $(0; e_0, e_1, e_2, e_3)$ eines Galilei-Raumes $(M, E, \mathbf{t}, \tau(\dots))$ ist ein Galilei-System, falls die Basisvektoren e_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) $\tau(e_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$ (d.h. $e_i \in E_0$);
- (ii) $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$;
- (iii) $\tau(e_0) = \pm 1$.

Wir werden später sehen, dass die in § 1.4 besprochenen zehn Erhaltungssätze aufs engste mit der Galilei-invarianz der KM zusammenhängen.

* * *

KAPITEL 2. Untersuchung der Bewegungsgleichungen

// ---- cette étude qualitative (des équations différentielles) aura par elle-même un intérêt de premier ordre ---- //

H. Poincaré, 1881

Die Zeitevolution eines mechanischen Systems ist durch gewöhnliche Differentialgleichungen - die Newtonschen Bewegungsgleichungen - bestimmt. Diese legen für einen gegebenen Zustand, charakterisiert durch die Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen, die weitere Entwicklung des Systems fest.

Es gibt nur wenige Beispiele von Bewegungsproblemen, die exakt (explizit) integriert werden können. Natürlich ist heute der Computer ein sehr hilfreiches Werkzeug (z.B. in der Astronautik). Daneben gilt es aber auch Methoden zu entwickeln, die qualitative Einsichten in die "nichtintegrablen" Probleme liefern. Auf diesem Gebiete sind gerade in neuerer Zeit beachtliche Entwicklungen zu verzeichnen. Es bleibt aber noch viel zu tun !

2.1 Allgemeines über Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt besprechen wir einige Grundbegriffe und Fakten aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Für ein vertieftes Studium verweise ich auf [4] - [7] des Literaturverzeichnis.

Die Newtonschen Gleichungen für N Teilchen haben die Form (die Cartesischen Koordinaten bezeichnen wir jetzt mit \underline{q}_i):

$$m_i \ddot{\underline{q}}_i = \underline{F}_i (\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_N, \dot{\underline{q}}_1, \dots, \dot{\underline{q}}_N, t) . \quad (2.1)$$

Diese sind von 2. Ordnung. Ein dazu äquivalentes System 1. Ordnung ist

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= p_i/m_i, \\ \dot{p}_i &= F_i(q_1, \dots, q_N, p_1/m_1, \dots, p_N/m_N, t).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Steht $x \in \mathbb{R}^{6N}$ abkürzend für $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$, so ist (2.2) von der allgemeinen Form

$$\dot{x} = X(x, t).\tag{2.3}$$

Hier ist X ein zeitabhängiges Vektorfeld,

$$X: M \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

(In unserem Fall ist $n = 6N$.) Die Koordinaten x des mechanischen Systems durchlaufen den Phasenraum (oder Zustandsraum) $M =$ offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Falls Nebenbedingungen vorliegen (z.B. Teilchen an einer masselosen festaufgehängten Schnur) ist $\dim M = 2f$, $f < 3N$, wobei f die Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist.

Wir fassen den Phasenraum M immer als Teilmenge des \mathbb{R}^{2f} auf, obschon der Zustandsraum schon für einfache Systeme eine allgemeinere differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. (Wir arbeiten immer in einer Karte.)

Die Vorgabe eines Vektorfeldes definiert ein dynamisches System. Unter einer Lösung der Differentialgleichung (2.3) versteht man eine Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 , wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Die Punkte $(\gamma(t), t)$ liegen für alle $t \in I$ im Defi-

nititionsbereich von X ;

$$(ii) \quad \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t), t) \quad \text{für alle } t \in I .$$

Häufig nennen wir $t \mapsto \gamma(t)$ auch eine Integralkurve des Vektorfeldes X .

In Komponenten schreibt sich die Gleichung (2.3)

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n, t) , \quad i = 1, \dots, n , \quad (2.4)$$

wo X_i die Komponentenfunktionen des Vektorfeldes X bezeichnen.

Bemerkung: Wir denken uns in jedem Punkt $x \in M$ den Vektor $X(x)$ "angeheftet". Dies bedeutet, dass wir X mit der Abbildung $\tilde{X}: M \longrightarrow TM := M \times \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto (x, X(x))$ identifizieren.

Eine Lösung ist also ein Weg, der in jedem Punkt $x \in M$ den Tangentialvektor $\tilde{X}(x) \in T_x M := \{ (x, \mathbb{R}^n) \}$ hat. (X nennt man auch den Hauptteil von \tilde{X} .)

Beispiele:

1) Lineare Differentialgleichungen: $\dot{x} = A(t)x + a(t)$;
 $A(t)$ ($t \in I$) ist eine $n \times n$ Matrixfunktion mit stetiger t -Abhängigkeit und $a(t)$ ist eine zeitabhängige Translation.

2) Kanonische Differentialgleichungen:

Hier ist das Vektorfeld X von der speziellen Form ^{*)}

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_{f+1}} , \dots , \frac{\partial H}{\partial x_{2f}} , -\frac{\partial H}{\partial x_1} , \dots , -\frac{\partial H}{\partial x_f} \right) , \quad (2.5)$$

wobei H eine differenzierbare Funktion ist, $H: U \subset \mathbb{R}^{2f} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

*) Wir notieren die Vektoren aus "typographischen" Gründen meistens als Zeilen. Im Matrizenkalkül sind diese aber als Spaltentupel zu denken.

Kanonische Differentialgleichungen treten in der Mechanik sehr häufig auf, wenn keine Dissipation vorhanden ist, z.B. in der Himmelsmechanik. Diese Systeme werden wir später sehr ausführlich besprechen. Eine wichtige Klasse von Beispielen erhalten wir aus (2.2), wenn sich die Kräfte \underline{F}_i aus einem Potential ableiten,

$$\underline{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} (q_1, \dots, q_N) .$$

Setzen wir $x = (q, p)$, $q = (q_1, \dots, q_N)$, $p = (p_1, \dots, p_N)$, so ist das Gleichungssystem von der Form (2.4), mit einem Hamiltonschen Vektorfeld vom Typ (2.5) zur Hamiltonschen Funktion

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q) .$$

Hamiltonsche (kanonische) Systeme lassen sich in die Quantenmechanik übersetzen und sind auch deshalb sehr wichtig. Sie haben eine Reihe von speziellen Eigenschaften. Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme sind sie deshalb nicht typisch. Andererseits sind in der Technik die meisten Systeme dissipativ und deshalb nicht durch kanonische Gleichungen (oder höchstens approximativ) zu beschreiben.

Falls das Vektorfeld X zeitunabhängig ist, nennen wir die Diffgl. (2.3) autonom, und sonst nichtautonom.

Das direkte Produkt $M \times \mathbb{R}$ (Definitionsbereich von X) ist der erweiterte Phasenraum.

Ist $\gamma : I \longrightarrow M$ eine Integralkurve von X , so nennen wir die Punktmenge $\{\gamma(t) : t \in I\} \subset M$ eine Phasenbahn

(= Projektion des Graphen von γ auf den Phasenraum; vgl. Fig. 2.1).

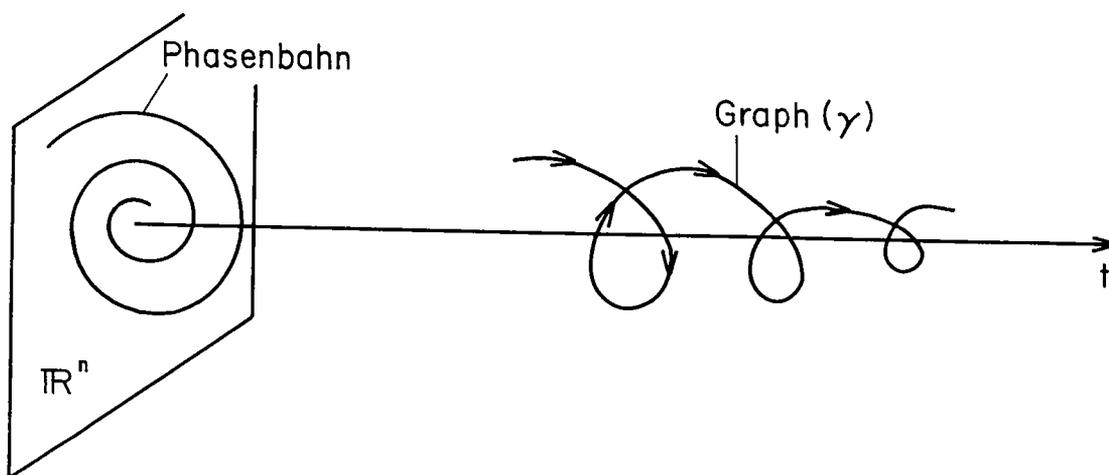


Fig. 2.1

Die qualitative Struktur aller Phasenbahnen, das Phasenportrait eines Vektorfeldes, lässt sich manchmal, vor allem in niederen Dimensionen, ohne grosse Rechnung finden. Beispiele werden wir kennenlernen. Etwa im zweidimensionalen autonomen Fall macht man zweckmässig eine Skizze des Vektorfeldes, aus der sich die Phasenbahnen ablesen lassen (vgl. die Uebungen).

An dieser Stelle bemerken wir noch, dass sich ein nicht-autonomes System immer trivialerweise im erweiterten Phasenraum als autonomes System auffassen lässt:

$$\dot{x} = X(x,t)$$

$$\dot{t} = 1 .$$

Dies ist für gewisse Beweise manchmal nützlich.

Transformation eines Vektorfeldes unter einem Diffeomorphismus

Oft ist es nützlich, ein dynamisches System auf neue Koordinaten zu transformieren. Wir betrachten zunächst den autonomen Fall. Sei also

$$\psi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus von U auf V . (Ohne weitere Präzisierungen bedeutet differenzierbar im folgenden, der Einfachheit halber, immer C^∞ .) Wir definieren das transformierte Vektorfeld $\psi_* X$ derart, dass eine Integralkurve $\alpha(t)$ von X unter ψ immer in eine Integralkurve von $\psi_* X$ übergeht, d.h. aus $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ soll folgen (vgl. Fig. 2.2)

$$\frac{d}{dt} \psi(\alpha(t)) = (\psi_* X)(\psi(\alpha(t))) .$$

Nun ist nach der Kettenregel *)

$$\frac{d}{dt} \psi(\alpha(t)) = D\psi(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = D\psi(\alpha(t)) \cdot X(\alpha(t)) .$$

Deshalb definieren wir

$$(\psi_* X)(\psi(x)) := D\psi(x) \cdot X(x) . \tag{2.6}$$

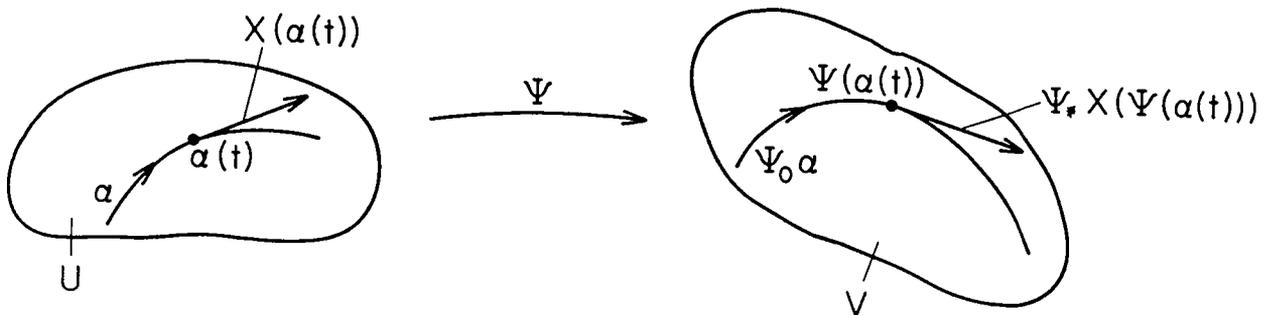


Fig. 2.2

*) Wichtige Begriffe, Sätze und Notationen aus der Analysis werden im Anhang I zusammengestellt.

Im nichtautonomen Fall betrachten wir zeitabhängige Diffeomorphismen, d.h. diffb. Abbildungen $\psi: U \times I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, derart, dass für jedes $t \in I$ (I ein offenes Intervall) $\psi_t := \psi(\cdot, t)$ ein Diffeomorphismus von U nach V ist. Die Verallgemeinerung ist nun, damit Integralkurven durch die Transformation ψ wieder in Integralkurven übergehen, folgendermassen zu wählen:

$$(\psi_* X)(\psi(x, t), t) = D\psi_t(x) \cdot X(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t). \quad (2.7)$$

Das Transformationsgesetz (2.7) kann man auch wie folgt interpretieren. Wir betrachten das Vektorfeld $\bar{X} = (X, 1)$ der autonomen Erweiterung im erweiterten Phasenraum. Ferner sei $\bar{\psi}(x, t) = (\psi(x, t), t)$ der zu ψ gehörige Diffeomorphismus im erweiterten Phasenraum. Dann hat das Vektorfeld \bar{Y} , definiert durch (vgl. (2.6))

$$\bar{Y}(\psi(x, t)) := D\bar{\psi}(x, t) \bar{X}(x, t),$$

die Form $(\psi_* X, 1)$ und ist also die autonome Erweiterung von $\psi_* X$.

Der folgende Satz ist zentral in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Er zeigt, dass in der Nähe eines nichtsingulären Punktes x_0 ($X(x_0) \neq 0$) die durch X beschriebene Strömung qualitativ sehr einfach ist.

Satz 2.1: Ein autonomes, differenzierbares Vektorfeld X ist in einer Umgebung jedes nichtsingulären Punktes diffeomorph zum konstanten Feld $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, d.h. es existiert ein lokaler Diffeomorphismus ψ mit $\psi_* X = e_1$.

Bemerkungen:

1) Dieser Glättungssatz zeigt, dass qualitativ (d.h. bis auf diffeomorphe Abbildungen) die Strömung lokal dieselbe ist wie für das Gleichungssystem:

$$\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_2 = \dot{y}_3 = \dots = \dot{y}_n = 0. \quad (2.8)$$

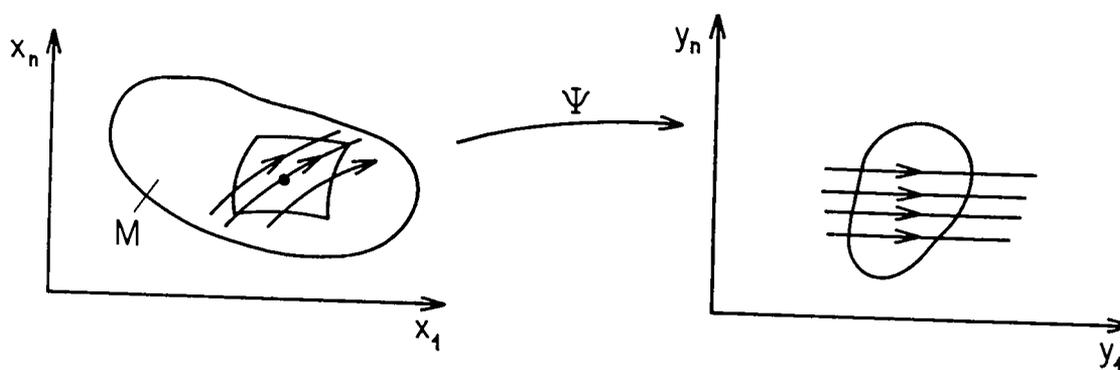


Fig. 2.3. Lokale Glättung eines Vektorfeldes

Die einzigen interessanten Fragen in der qualitativen Theorie der dynamischen Systeme (2.3) betreffen deshalb das Verhalten der Strömung in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes (oder singulären Punktes) x_0 , $X(x_0) = 0$, oder das globale langzeitige Verhalten. Gerade über letzteres kann der Computer keine sichere Auskunft geben. Auf diesem Gebiet gibt es in neuerer Zeit interessante Entwicklungen. Die Gesamtheit der möglichen Bewegungen eines mechanischen Systems ist aber im allgemeinen ungeheuer kompliziert, und selbst in einfachen Fällen ist man weit davon entfernt, eine vollständige Beschreibung geben zu können.

2) Der Glättungssatz 2.1 ist eigentlich der Hauptsatz der lokalen Theorie der Differentialgleichungen. Aus ihm werden

wir insbesondere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen in trivialer Weise erhalten, da man über das System (2.8) natürlich alles weiss. Es ist dies der einzige Satz, den wir in diesem Kapitel nicht beweisen. Für einen Beweis siehe [4], § 32, oder [6], S. 277.

Wir ziehen jetzt einige Folgerungen aus dem Glättungssatz 2.1. Zunächst erhalten wir sofort die Existenz von Lösungen von (2.3) zu gegebenen Anfangswerten.

Korollar 1: Zu $x_0 \in M$ gibt es eine Lösung $\alpha(t)$ von $\dot{x} = X(x)$, mit der Anfangsbedingung $\alpha(t_0) = x_0$.

Beweis: Falls $X(x_0) = 0$, ist $\alpha(t) \equiv x_0$ eine Lösung. Ist $X(x_0) \neq 0$, so ist das Gleichungssystem (2.8) in einer Umgebung von x_0 äquivalent zur gegebenen Gleichung bezüglich einem Diffeomorphismus ψ . Das System (2.8) hat aber trivialerweise eine Lösung $\beta(t)$ mit $\beta(t_0) = y_0 := \psi(x_0)$. Deshalb ist $\alpha := \psi^{-1} \circ \beta$ eine Lösung von (2.3) mit der gewünschten Anfangsbedingung. \square

Korollar 2: Sind $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$, $\gamma_2: I_2 \rightarrow M$ zwei Lösungen von $\dot{x} = X(x)$ mit den Anfangsbedingungen

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0, \quad X(x_0) \neq 0.$$

Dann gibt es ein Intervall I_3 mit $t_0 \in I_3$, auf welchem $\gamma_1 = \gamma_2$ ist.

Beweis: Dies ist trivialerweise wahr für das System (2.8), also auch für die lokal äquivalente Gleichung $\dot{x} = X(x)$.

Bemerkung: Es wird sich zeigen, dass man die Einschränkung $X(x_0) \neq 0$ fallen lassen kann.

Lokale Flüsse

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen Begriff. Es sei X ein autonomes Vektorfeld auf $M \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in M$.

Definition: Unter einem lokalen Fluss, bestimmt durch das Vektorfeld X , in der Umgebung von x_0 verstehen wir ein Trippelein (I, V_0, ϕ) , bestehend aus einem Intervall

$I = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \varepsilon\}$ auf der t -Achse, einer Umgebung V_0 von x_0 und einer Abbildung $\phi: I \times V_0 \longrightarrow M$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Für festes $t \in I$ ist die Abbildung $\phi_t: V_0 \longrightarrow M$, definiert durch $\phi_t(x) := \phi(x, t)$, ein Diffeomorphismus.

(ii) Für festes $x \in V_0$ ist die Abbildung $\alpha: I \longrightarrow M$, definiert durch $\alpha(t) = \phi(x, t)$, eine Lösung von $\dot{x} = X(x)$ mit der Anfangsbedingung $\alpha(0) = x$.

(iii) Es gilt (lokal)

$$\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x),$$

falls beide Seiten definiert sind. [ϕ_t nennt man auch eine lokale, 1-parametrische Gruppe von Diffeomorphismen.]

Korollar 3: Das Vektorfeld X bestimmt einen lokalen Fluss in einer Umgebung jedes nichtsingulären Punktes.

Beweis: Dies gilt offensichtlich für (2.8), also nach Satz 2.1 auch für X .

Bemerkung: Es wird sich zeigen, dass die Einschränkung $X(x_0) \neq 0$ nicht nötig ist.

Nichtautonomer Fall

Wir betrachten jetzt den nichtautonomen Fall

$$\dot{x} = X(x, t), \tag{2.9}$$

wobei das Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definiert sei.

Korollar 4 (Rektifizierung für nichtautonome Systeme):

Zu jedem Punkt $(x_0, t_0) \in U$ existiert eine Umgebung V und ein Diffeomorphismus $\bar{\varphi} : V \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^{n+1}$, welcher die Zeit nicht ändert, d.h. $\bar{\varphi}(x, t) = (\varphi(x, t), t)$, und unter welchem X in das Nullfeld transformiert wird:

$$\varphi_* X = 0 .$$

Dies zeigt, dass (2.9) äquivalent zum System

$$\dot{y} = 0 \tag{2.10}$$

in W ist.

Beweis: Wir betrachten das erweiterte autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, t) \\ \dot{t} &= 1 . \end{aligned}$$

Satz 2.1 impliziert, dass ein Diffeomorphismus

$\bar{\varphi} : V \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ existiert mit

$$D\bar{\varphi} \cdot \bar{X} = (0, 1) , \quad \bar{X} := (X, 1) .$$

[Beachte, dass \bar{X} keine kritischen Punkte hat.]

Setzen wir

$$\bar{\varphi}(x, t) = (\varphi(x, t), t) ,$$

so gilt insbesondere (für die n ersten Komponenten)

$$D_1 \varphi \cdot X + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 .$$

Sei jetzt $\bar{\varphi}(x, t) := (\varphi(x, t), t)$, dann ist $\varphi_* X = 0$ und $\bar{\varphi}$ erfüllt die gewünschten Eigenschaften. \square

Uebung: Leite aus Korollar 4 den Satz 2.1 ab.

Korollar 5: Für genügend kleine $|t - t_0|$ existiert eine Lösung $\alpha(t)$ von (2.9), welche die Anfangsbedingung $\alpha(t_0) = x_0 \in U$ erfüllt.

Korollar 6: Zwei Lösungen von (2.9), welche dieselben Anfangsbedingungen erfüllen, stimmen auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche überein.

Beweise: trivial !

Bemerkung: Das Korollar 6 zeigt, dass wir im Korollar 2 die Einschränkung $X(x_0) \neq 0$ weglassen können.

Nun verallgemeinern wir den Begriff des lokalen Flusses auf den nichtautonomen Fall (s. Fig. 2.4).

Definition: Unter einer lokalen zweiparametrischen Familie von Transformationen, bestimmt durch das Vektorfeld $X(x,t)$, in einer Umgebung eines Punktes (x_0, t_0) verstehen wir ein Tripel (I, V_0, ϕ) , bestehend aus einem Intervall I der reellen Achse, welches t_0 enthält, einer Umgebung V_0 von x_0 im Phasenraum und einer Abbildung

$$\phi : V_0 \times I \times I \longrightarrow U \quad (= \text{Definitionsbereich von } X)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für feste $t_1, t_2 \in I$ ist die Abbildung $\phi_{t_2, t_1} : V_0 \times \{t_1\} \longrightarrow U$, definiert durch $\phi_{t_2, t_1}(x) = \phi(x, t_2, t_1)$, ein Diffeomorphismus mit Bild in der Ebene $t = t_2$.

(ii) Für feste $x \in V_0, t_1 \in I$ ist $t \longmapsto \gamma(t)$, definiert durch $t \longmapsto \phi(x, t, t_1) =: (\gamma(t), t)$, eine Lösung von (2.9) mit Anfangsbedingung $\gamma(t_1) = x$.

(iii) Lokal gilt

$$\phi_{t_3, t_2} \circ \phi_{t_2, t_1} = \phi_{t_3, t_1}.$$

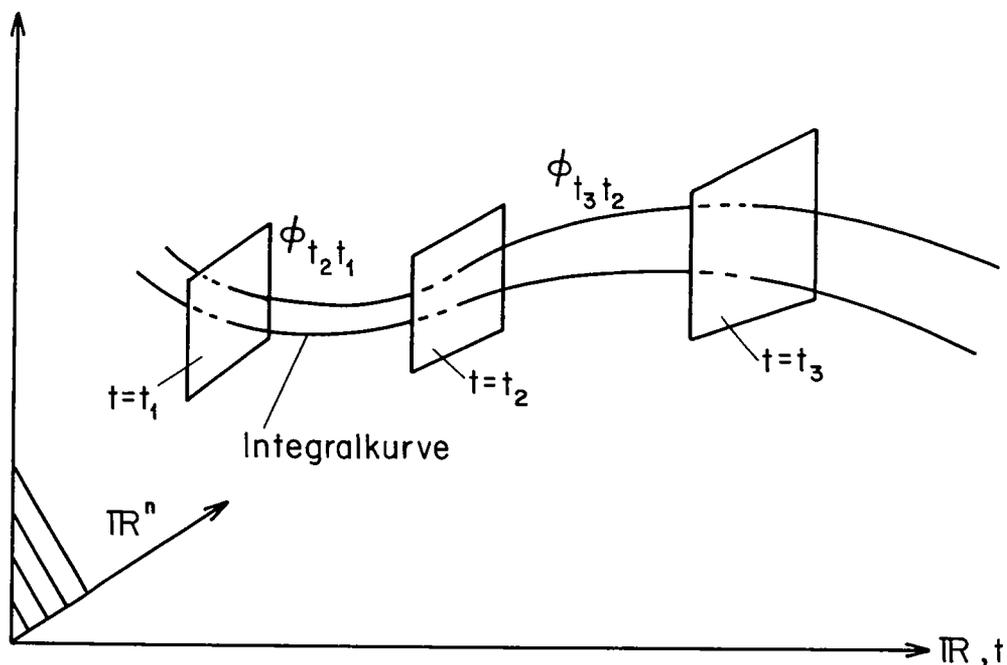


Fig. 2.4

Korollar 7: Das Vektorfeld $X(x,t)$ bestimmt in einer Umgebung jedes Punktes (x_0, t_0) eine lokale zweiparametrische Familie von Transformationen.

Beweis: Triviale Folge von Korollar 4.

Bemerkungen: 1) Falls wir jede Ebene $t = \text{const.}$ im erweiterten Phasenraum mit dem Phasenraum identifizieren, können wir $\phi_{t,s}$ als lokalen Diffeomorphismus des Phasenraumes auffassen. Ist speziell X autonom, so hängt $\phi_{t,s}$ nur von der Differenz $t - s$ ab und $\phi_{t,s} = \phi_{t-s} =$ lokaler Fluss zu X . [Dies folgt aus dem Eindeutigkeitsatz und der Tatsache, dass für eine Lösung $\alpha(t)$ der autonomen Gleichung auch $\alpha(t+c)$ eine Lösung ist.]

2) Korollar 7 enthält Korollar 3 als Spezialfall, aber ohne die Einschränkung $X(x) \neq 0$.

Erste Integrale

Wir betrachten zuerst wieder den autonomen Fall:

$$X: M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n .$$

Definition: Eine Funktion $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein (erstes) Integral der Diffgl.

$$\dot{x} = X(x) ,$$

falls für jede Lösung $\gamma: I \longrightarrow M$ die Funktion $f \circ \gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist.

Dies ist äquivalent zu

$$D_X f = 0 ,$$

wo D_X die Richtungsableitung bezeichnet, denn

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = Df(\gamma(t)) \cdot X(\gamma(t)) = D_X f .$$

Beispiele:

1) Die 10 Erhaltungssätze in §1.4 für ein abgeschlossenes N -Körperproblem.

2) Sei X_H ein Hamiltonsches Vektorfeld zu einer zeitunabhängigen Funktion H (Hamiltonfunktion). Dann ist H ein erstes Integral von $\dot{x} = X_H(x)$, denn (sei $x = (q, p)$)

$$D_{X_H} H = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0 .$$

Korollar 8: In einer geeigneten Umgebung jedes Punktes $x \in M$, mit $X(x) \neq 0$, hat die Gleichung $\dot{x} = X(x)$ $n-1$ funktional unabhängige *) Integrale f_1, \dots, f_{n-1} . Uebers dies ist jedes andere

*) Funktionen $f_1, \dots, f_m: U \longrightarrow \mathbb{R}$ sind funktional unabhängig in einer Umgebung von $x \in U$, falls der Rang der Matrix Df gleich m ist, wobei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ durch $x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ definiert ist.

Integral (lokal) eine Funktion von f_1, \dots, f_{n-1} .

Beweis: Der Satz ist trivial für die Standard Gleichung

$$\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_n = 0.$$

Hier sind die ersten Integrale beliebige differenzierbare Funktionen von y_2, \dots, y_n und die Koordinatenfunktionen y_2, \dots, y_n sind $n-1$ funktional unabhängige erste Integrale.

Nach Satz 2.1 folgt die Richtigkeit von Korollar 8 unmittelbar. \square

Nun betrachten wir den nichtautonomen Fall:

$$\dot{x} = X(x, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.11)$$

$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein erstes Integral, falls für jede Lösung $t \mapsto \gamma(t)$ von (2.11) die Funktion $t \mapsto f(\gamma(t), t)$ zeitunabhängig ist; dies ist gleichbedeutend damit, dass die Funktion $f \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(t) = (\gamma(t), t)$, zeitunabhängig ist. Dies wiederum ist gleichbedeutend damit, dass f ein erstes Integral des erweiterten autonomen Systems

$$\dot{\bar{x}} = \bar{X}(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x, t), \quad \bar{X} = (X, 1) \quad (2.12)$$

ist. Anschaulich bedeutet dies, dass jede Integralkurve in einer Niveaufläche von f verläuft (s. Fig. 2.5).

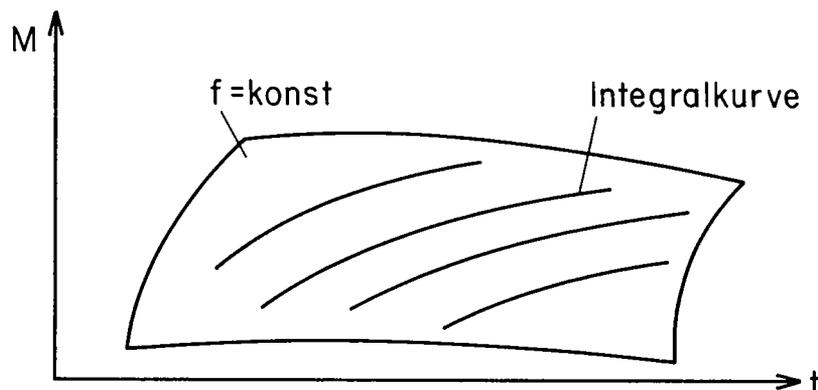


Fig. 2.5

Korollar 9: Die Gleichung (2.11) hat n funktional unabhängige erste Integrale.

Beweis: $\bar{X}(\bar{x}) \neq 0$ für jedes \bar{x} . Also folgt das Korollar aus Korollar 8.

2.2. Autonome kanonische Systeme mit einem Freiheitsgrad

Wir schicken folgende Bemerkung voraus. Für $n = 1$ lässt sich im autonomen Fall die Differentialgleichung

$$\dot{x} = X(x) \tag{2.13}$$

durch Trennung der Variablen immer lösen. Die Lösung $\gamma(t)$ von (2.13) mit der Anfangsbedingung

$$\gamma(t_0) = x_0 \tag{2.14}$$

ist

$$\gamma(t) = x_0, \text{ falls } X(x_0) = 0. \tag{2.15}$$

Falls $X(x_0) \neq 0$, existiert zu $\gamma(t)$ (wegen $\dot{\gamma}(t_0) = X(x_0) \neq 0$) die Umkehrfunktion $t(x)$ in einer genügend kleinen Umgebung von x_0 und erfüllt $dt/dx = 1/X(x)$. Also ist

$$t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{X(y)}. \tag{2.15'}$$

Damit ist das Problem auf eine Quadratur und die Umkehrung einer Funktion zurückgeführt.

Nun betrachten wir die Newtonsche Bewegungsgleichung in einer Dimension

$$m \ddot{q} = F(q), \tag{2.16}$$

wobei $F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als zeitunabhängig angenommen wird.
Ein zu (2.16) äquivalentes System von Differentialgleichungen
1. Ordnung ist

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p/m \\ \dot{p} &= F(q) .\end{aligned}\tag{2.17}$$

Sei $F(q) = -U'(q)$ ($U = \text{Potential zu } F$) und

$$H(q,p) = p^2/2 \cdot m + U(q) ,\tag{2.18}$$

so können wir (2.17) in folgender Form schreiben:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} , \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} .\tag{2.19}$$

Die Newtonsche Gleichung (2.16) ist also äquivalent zu einem kanonischen System mit einem Freiheitsgrad mit der Hamiltonfunktion (2.18). Das System (2.19) ist ein spezielles dynamisches System mit dem Hamiltonschen Vektorfeld (siehe 2.5):

$$X_H(q,p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p} , - \frac{\partial H}{\partial q} \right) .$$

Falls $x = (q,p)$, dann lautet (2.19)

$$\dot{x} = X_H(x) .\tag{2.19'}$$

Systeme der Art (2.19) (kanonische Systeme) mit einem Freiheitsgrad und zeitunabhängiger Hamiltonfunktion (autonomer Fall) sind im gleichen Sinne integrabel wie die eindimensionalen autonomen Systeme (2.13). Dies beruht auf dem Energiesatz, den wir schon in § 2.1 abgeleitet haben (s. Seite 48):

$$D_{X_H} H = 0 \implies H \text{ konstant längs jeder Integralkurve.}\tag{2.20}$$

Die Punktmenge $\{(q,p) \in \mathbb{R}^2 : H(q,p) = E\}$ nennen wir die Niveaukurve zur Energie E.

Die Gleichgewichtspunkte des Vektorfeldes X_H fallen mit den kritischen Punkten von H zusammen (x_0 kritischer Punkt von H , falls $\text{grad } H(x_0) = 0$.) [Letztere kann man als Maxima, Minima, oder Sattelpunkte der Fläche in \mathbb{R}^3 , definiert durch $z = H(q,p)$, auffassen.]

In der Umgebung jedes nichtkritischen Punktes ist nach dem impliziten Funktionentheorem die Energieniveau-Kurve eine glatte Kurve. Lokal können wir dann $H(q,p) = E$ nach p auflösen, $p = p(q,E)$, und damit in die erste Gleichung von (2.19) eingehen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p(q, E)) . \quad (2.21)$$

In dieser Weise ist das Problem auf den integrablen Fall (2.13) zurückgeführt.

Der Definitionsbereich $M \subset \mathbb{R}^2$ von H ist der Phasenraum des Hamiltonschen Systems. Für eine Lösung $(q(t), p(t))$ von (2.19) mit der Anfangsbedingung (q_0, p_0) zur Zeit $t = 0$, liegen die Punkte für alle Zeiten in der Zusammenhangskomponente der Energieniveau-Kurve zu $H(q_0, p_0)$, zu welcher (q_0, p_0) gehört. Die Phasenbahnen fallen also mit den Zusammenhangskomponenten der Energieniveaukurven zusammen.

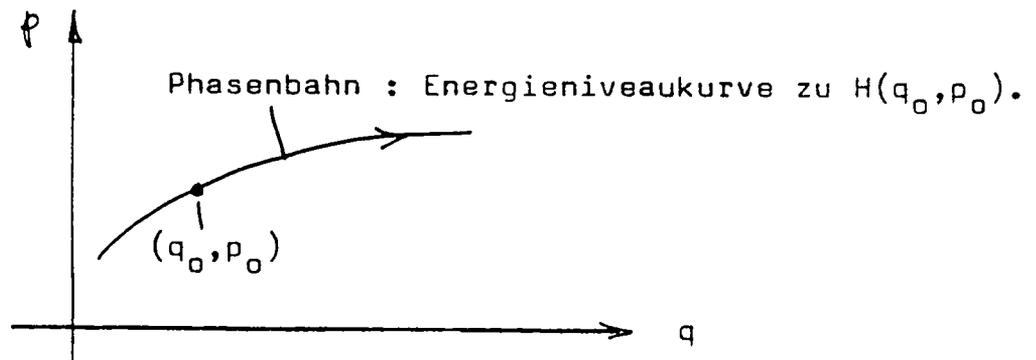


Fig. 2.6

Wenn wir von pathologischen Fällen absehen, gibt es für letztere die folgenden Möglichkeiten (s. Fig. 2.7):

- (A) Die Niveaukurve fällt mit einem kritischen Punkt zusammen.

Andernfalls ist die Niveaukurve eine glatte Kurve, welche

- (B) geschlossen ist, ohne durch einen kritischen Punkt zu laufen;
- (C) beidseitig ins Unendliche läuft, ohne einen kritischen Punkt zu treffen;
- (D) einseitig ins Unendliche läuft und im Endlichen in einem kritischen Punkt endet;
- (E) beidseitig in einem (nicht notwendig demselben) kritischen Punkt endet.

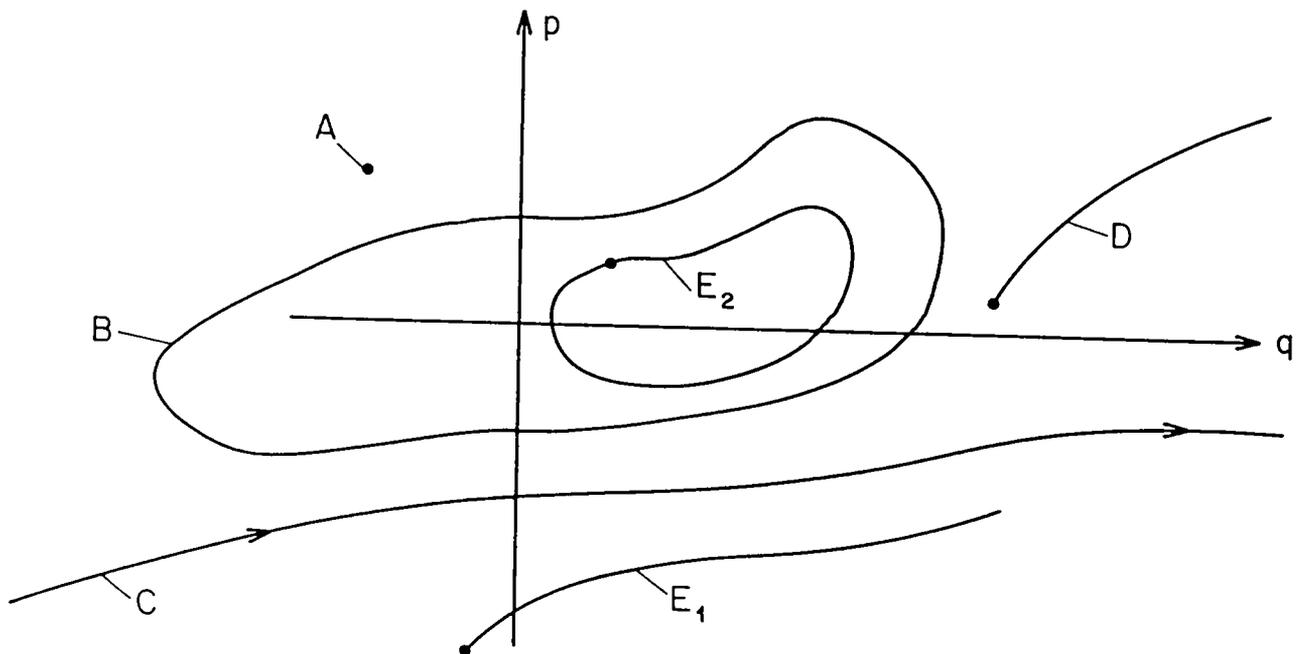


Fig. 2.7

Bemerkungen:

Der Fall A entspricht einer Gleichgewichtslage. Im Fall B verschwindet (\dot{q}, \dot{p}) nirgends und es gibt eine minimale endliche Zeit $T > 0$ mit $x(t+T) = x(t)$ für alle t , d.h. die Lösung ist periodisch. Im Falle C liegt eine Streu-
bahn vor, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass das Teilchen in endlicher Zeit ins Unendliche läuft. Im Falle D handelt es sich entweder um eine Einfangbahn oder eine Fluchtbahn. Dabei wird das Teilchen nicht in endlicher Zeit im kritischen Punkt eingefangen (sonst müsste es sich auf Grund der Eindeutigkeit immer dort befinden). Schliesslich führt im Falle E das Teilchen in unendlich langer Zeit eine endliche Bewegung zwischen zwei (E_1) oder einem (E_2) kritischen Punkt durch.

Als Beispiel betrachten wir die Hamiltonfunktion (2.18). Qualitativ sei der Graph von $U(q)$ wie in der folgenden Fig. 2.8. Darunter sind die Niveaukurven von $H(q,p)$ skizziert. Diese sind gegeben durch die Formel

$$p(q,E) = \pm \sqrt{2m (E - U(q))} \quad (2.22)$$

(symmetrisch bezüglich der Achse $p = 0$!).

Die kritischen Punkte von H sind bestimmt durch

$$\text{grad } H = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) = (U', p/m) = 0 ,$$

d.h.
$$\underline{p = 0, \quad U'(q) = 0 .} \quad (2.23)$$

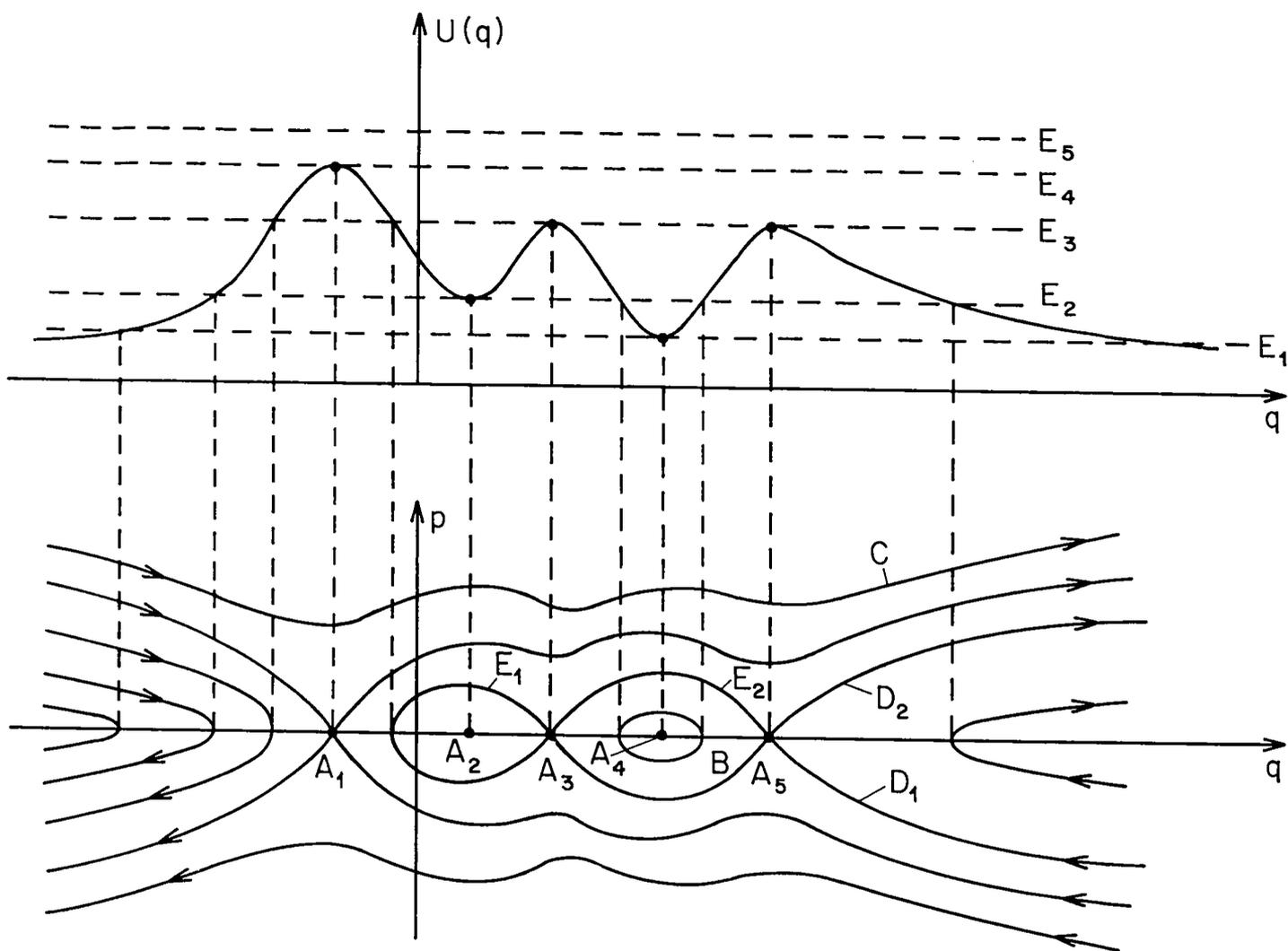


Fig. 2.8 Phasenportrait für $H = p^2/2m + U(q)$.

Wir finden in diesem Beispiel alle oben aufgeführten Fälle A - E . Versuche die einzelnen Phasenbahnen anschaulich zu verstehen (rollende Kugel im Potentialgebirge).

Verhalten in der Nähe der kritischen Punkte

In der Nähe einer kritischen Stelle $U'(q_0) = 0$ können wir das Potential entwickeln: $U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} U''(q_0)(q-q_0)^2 + \dots$
Wir betrachten deshalb zunächst Potentiale der Form

$$U(q) = \frac{1}{2} k q^2, \quad k = \pm m \omega^2.$$

Die Niveaueurven sind dann gegeben durch

$$p^2/2m \pm \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = E.$$

Im attraktiven Fall gilt das $+$ Zeichen und der kritische Punkt ist ein Minimum der potentiellen Energie. Die Phasenbahnen sind dann Ellipsen mit $(q,p) = 0$ als Mittelpunkt (s. Fig. 2.9).

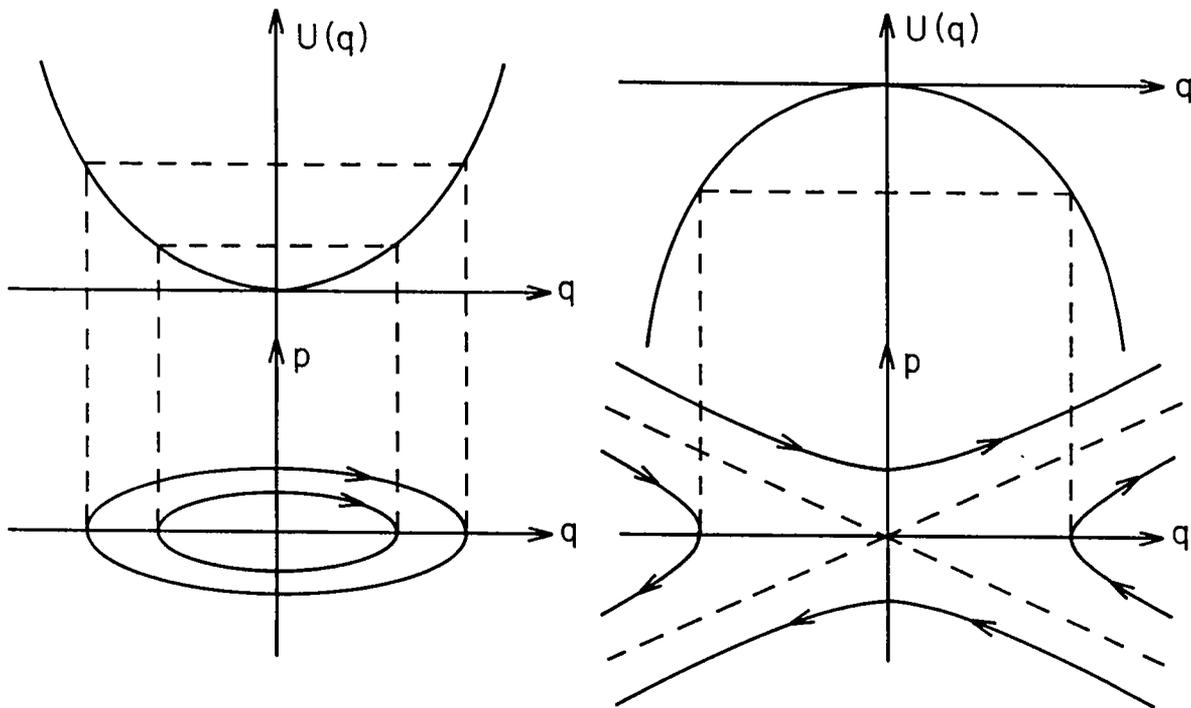


Fig. 2.9

Im abstossenden Fall gilt das - Zeichen und der kritische Punkt ist ein Maximum der Energie. Die Niveaueurven sind dann Hyperbeln (s.Fig. 2.9).

Es ist geometrisch klar, dass diese Linearisierung der Bewegungsgleichungen qualitativ das Verhalten im nicht-linearen Fall in der Nähe der kritischen Punkte richtig beschreibt. Dies wollen wir aber auch analytisch zeigen. Die q -Achse sei so gewählt, dass $q = 0$ ein kritischer Punkt sei. Da eine additive Konstante für U irrelevant ist, dürfen wir $U(0) = U'(0) = 0$ wählen. Ferner betrachten wir den nichtentarteten Fall $U''(0) \neq 0$.

Nun gilt folgendes

Lemma 1: In einer Umgebung eines nichtentarteten kritischen Punktes können Koordinaten so eingeführt werden, dass

$$U(y) = c y^2, \quad c = \operatorname{sgn} U''(0).$$

↑
(neue Funktion !)

Bevor wir dieses Lemma beweisen, folgern wir, dass in der Nähe eines nichtentarteten kritischen Punktes die Niveaueurven unter einem geeigneten lokalen Diffeomorphismus entweder in Ellipsen (für $U''(0) > 0$) oder in Hyperbeln (für $U''(0) < 0$) übergehen. Dies zeigt, dass die linearisierten Gleichungen qualitativ das richtige Verhalten in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes geben. Es stellt sich natürlich die interessante (und schwierige) Frage, wie verallgemeinerungsfähig diese Aussage ist. Für Hamiltonsche Systeme wurden in dieser Beziehung erst in neuerer Zeit Fortschritte erzielt (Arnold, Moser).

Zum Beweis von Lemma 1 stellen wir zunächst folgendes fest:

Lemma 2: Sei f eine differenzierbare Funktion (der Klasse C^r) mit der Eigenschaft, dass f bei $x = 0$ verschwindet. Dann lässt sich f darstellen als $f(x) = xg(x)$, wo g eine differenzierbare Funktion (der Klasse C^{r-1}) in einer Umgebung von $x = 0$ ist.

Bemerkung: Die beiden Lemmata lassen sich auf mehrere Variablen verallgemeinern (Morse, Hadamard).

Beweis von Lemma 2: Dieses folgt aus

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 f'(tx) x dt = x \int_0^1 f'(tx) dt$$

und der Tatsache, dass

$$g(x) := \int_0^1 f'(tx) dt$$

eine Funktion der Klasse C^{r-1} ist. \square

Beweis von Lemma 1: Wir wenden das Lemma 2 zweimal auf die Funktion U in Lemma 1 an und finden $U(q) = q^2 \varphi(q)$, wobei $2\varphi(0) = U''(0) \neq 0$. Nun sei $y = q \sqrt{|\varphi(q)|}$, dann ist $U(q) = \text{sgn } \varphi(0) y^2 = \text{sgn } U''(0) y^2$. Da die Funktion $\sqrt{|\varphi(q)|}$ in einer Umgebung von $q = 0$ $(r-2)$ mal differenzierbar ist, falls U von der Klasse C^r ist, folgt die Behauptung von Lemma 1. \square

Zeitlicher Verlauf der Bewegung

Nach dem Energiesatz ist

$$\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + U(q) = E,$$

also

$$\dot{q}(t) = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(q(t))]} . \quad (2.24)$$

Diese Gleichung ist von der Form (2.13) und hat die "Lösung"

$$t(q) - t(q_0) = \int_{q_0}^q dx \frac{1}{\sqrt{(2/m)(E-U(x))}} , \quad (2.25)$$

falls $E \neq U(q_0)$. Die Umkehrpunkte q_i sind definiert durch $U(q_i) = E$ (s. Fig. 2.10). In der Umgebung eines Umkehrpunktes q_1 kann der zeitliche Verlauf der Bahn aus der Taylor-Entwicklung

$$U(q) = U(q_1) + (q-q_1) U'(q_1) + \mathcal{O}((q-q_1)^2) \quad (2.26)$$

abgelesen werden. Im generischen Fall ist $U'(q_1) \neq 0$ und folglich, für q_0 nahe bei q_1

$$t(q_1) \simeq t(q_0) + \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{(2/m)U'(q_1)(q_1-q)}} .$$

Das Integral ist endlich und das Teilchen erreicht den Umkehrpunkt in endlicher Zeit. Dort ändert das Vorzeichen der Geschwindigkeit

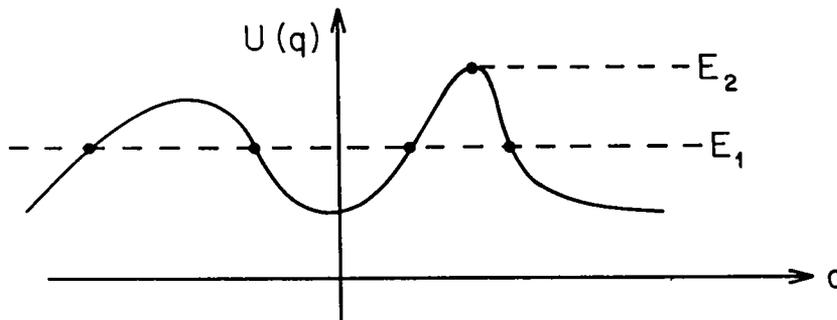


Fig. 2.10. Umkehrpunkte zu gegebener Energie.

Falls der Umkehrpunkt gleichzeitig ein kritischer Punkt ist, so divergiert $t(q)$ für $q \rightarrow q_1$ (Kriechbahn).

Wir betrachten noch eine periodische Bahn zwischen den Umkehrpunkten q_1 und q_2 . Die Periode zur Energie E ist

$$T(E) = 2 \cdot \int_{q_1}^{q_2} \left[\frac{2}{m} (E - U(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} dx . \quad (2.27)$$

2.3 Das Zweikörperproblem mit Zentralkräften

Im letzten Abschnitt ermöglichte es der Energiesatz, ein autonomes Hamiltonsches System mit zweidimensionalem Phasenraum auf ein 4-dimensionales dynamisches System der Form (2.13) zurückzuführen. In diesem Abschnitt betrachten wir ein abgeschlossenes Zweikörperproblem mit Zentralkräften. Wie in § 1.4 gezeigt wurde, gelten für dieses System 10 Erhaltungssätze. Dies wird es ermöglichen, das Problem (mit 12-dimensionalem Phasenraum) wieder durch Quadraturen zu lösen. [Eine allgemeine Diskussion der "integrablen" Probleme werden wir in Kap. 10 durchführen.]

Die Bewegungsgleichungen lauten (siehe § 1.3)

$$m_1 \ddot{\underline{q}}_1 = \underline{F}_{12} , \quad m_2 \ddot{\underline{q}}_2 = \underline{F}_{21} \quad (2.28)$$

mit

$$F_{12} = - F_{21} = - \frac{\partial}{\partial q_1} V(|q_1 - q_2|) . \quad (2.29)$$

Das Gleichungssystem (2.28) ist äquivalent zum Hamiltonschen System, welches zur Hamiltonfunktion

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + V(|q_1 - q_2|) \quad (2.30)$$

gehört. Da $\nabla V(|x|) = V'x/|x|$, muss man für $V'(0) \neq 0$ die Punkte $\{(q, p) : q_1 = q_2\}$ aus dem Phasenraum ausschliessen, da dort die Zweiteilchenkraft nicht C^1 ist (also auch nicht das Hamiltonsche Feld χ_H).

Nun führen wir Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ein (lineare Transformation):

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} , & \underline{P} &= p_1 + p_2 , \\ \underline{q} &= q_1 - q_2 , & \underline{p} &= \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2} . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Umkehrabbildung lautet

$$\begin{aligned} p_1 &= (1 + m_2/m_1)^{-1} (\underline{P} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \underline{p}) \\ p_2 &= (1 + m_1/m_2)^{-1} (\underline{P} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} \underline{p}) \\ q_1 &= (1 + m_1/m_2)^{-1} (\underline{q} + \frac{m_1 + m_2}{m_2} \underline{Q}) \\ q_2 &= (1 + m_2/m_1)^{-1} (-\underline{q} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \underline{Q}) . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Diese Transformation wird später auf ein N-Teilchensystem verallgemeinert und wir werden sehen, dass sie in einem noch zu definierenden Sinne kanonisch ist.

Die Hamiltonfunktion in den neuen Variablen bezeichnen wir mit K . Man findet leicht

$$K(\underline{q}, \underline{Q}, \underline{p}, \underline{P}) = \underline{P}^2/2M + H_{\text{rel}}(\underline{q}, \underline{p}), \quad (2.33)$$

mit $M = m_1 + m_2$ und

$$H_{\text{rel}} = \underline{p}^2/2m + V(|\underline{q}|), \quad m := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} : \text{reduzierte Masse.} \quad (2.34)$$

Weiter erfüllen $\underline{q}, \underline{Q}, \underline{p}, \underline{P}$ die kanonischen Gleichungen zu K . Dies ergibt sich wie folgt: Die kanonischen Gleichungen zu H lauten

$$\dot{\underline{q}}_i = \underline{p}_i/m_i, \quad \dot{\underline{p}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \underline{q}_i}, \quad (i = 1, 2).$$

Daraus folgt z.B.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}} &= \frac{m_2 \dot{\underline{p}}_1 - m_1 \dot{\underline{p}}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial V}{\partial \underline{q}_1} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial V}{\partial \underline{q}_2} \\ &= -\frac{\partial \underline{q}_1}{\partial \underline{q}} \frac{\partial V}{\partial \underline{q}_1} - \frac{\partial \underline{q}_2}{\partial \underline{q}} \frac{\partial V}{\partial \underline{q}_2} = -\frac{\partial V}{\partial \underline{q}}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\dot{\underline{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \underline{q}}.$$

Aehnlich deduziert man die anderen kanonischen Gleichungen zu K und ebenso zeigt man die Umkehrung. Im übrigen werden wir aus der allgemeinen Theorie später sehen, dass man sich solche Rechnungen ersparen kann.

Die kanonischen Gleichungen zu K lauten

$$\dot{\underline{Q}} = \underline{P}/M, \quad \dot{\underline{P}} = 0, \quad (2.35)$$

$$\dot{\underline{q}} = \frac{\partial H_{\text{rel}}}{\partial \underline{p}} = \underline{p}/m, \quad \dot{\underline{p}} = -\frac{\partial H_{\text{rel}}}{\partial \underline{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \underline{q}}. \quad (2.36)$$

In (2.35) haben wir einmal mehr den Schwerpunktsatz und den Impulssatz gefunden. Die relative Bewegung ist durch das kanonische System (2.36) zur Hamiltonfunktion (2.34) gegeben. Schwerpunkts- und Relativbewegung sind entkoppelt. Damit ist die Dimension des Phasenraumes bereits auf die Hälfte reduziert.

Das System (2.36) hat aber noch vier weitere Integrale, nämlich die Energie der Relativbewegung $H_{rel}(\underline{q}, \underline{p})$ und den relativen Drehimpuls

$$\underline{L}_{rel} = \underline{q} \wedge \underline{p} . \quad (2.37)$$

Der erste dieser Erhaltungssätze wurde allgemein in § 2.1 für autonome Hamiltonsche Systeme bewiesen. Den Drehimpulssatz erhält man z.B. durch direkte Rechnung:

$$\frac{d}{dt} \underline{L}_{rel} = \dot{\underline{q}} \wedge \underline{p} + \underline{q} \wedge \dot{\underline{p}} = m^{-1} \underline{p} \wedge \underline{p} - \underline{q} \wedge \frac{\partial}{\partial \underline{q}} V(|\underline{q}|) = 0 ,$$

da $\frac{\partial}{\partial \underline{q}} V(|\underline{q}|)$ parallel zu \underline{q} ist. Der Drehimpulssatz $\underline{L}_{rel} = 0$ ist aber auch äquivalent zur Drehinvarianz des Potentials $V(|\underline{q}|)$, bzw. der Hamiltonfunktion H_{rel} , wie aus der allgemeinen Diskussion in § 4.5 hervorgehen wird. Aus der Drehinvarianz folgt auch: Mit einer Lösung $(\underline{q}(t), \underline{p}(t))$ ist auch die rotierte Integralkurve $(R\underline{q}(t), R\underline{p}(t))$, $R \in O(3)$, eine Lösung.

Falls für die Anfangsbedingung $\underline{L}_{rel} = 0$ ist, so ist \underline{q} parallel zu \underline{p} . In diesem Falle hat man zu unterscheiden:

- (a) Ist $\underline{q} = \underline{p} = 0$, so ist man nur im Phasenraum für $V'(0) = 0$ und dann liegt eine Gleichgewichtslage vor. (b) Andernfalls

wählen wir eine Rotation, die die p - oder die q -Achse in die 1-Richtung transformiert und lösen (2.36) in der 1-Richtung mit verschwindenden 2- und 3-Komponenten.

Falls $\underline{L}_{rel} \neq 0$ ist, so wählen wir ein Bezugssystem, für welches \underline{L}_{rel} in die 3-Richtung zeigt: $\underline{L}_{rel} = (0, 0, L)$ und lösen (2.36) als ebenes Problem. Der Phasenraum ist jetzt noch 4-dimensional.

Wir führen Polarkoordinaten ein

$$q_1 = r \cos \varphi, \quad q_2 = r \sin \varphi. \quad (2.38)$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$L = m r^2 \dot{\varphi}, \quad \dot{\underline{q}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (2.39)$$

Mit dem Energiesatz

$$\frac{1}{2} m \dot{\underline{q}}^2 + V(|\underline{q}|) = E (= \text{const.})$$

folgt

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(V + \frac{L^2}{2mr^2} \right) = E. \quad (2.40)$$

Durch Differentiation erhalten wir *)

$$m \ddot{r} = - U'(r), \quad (2.41)$$

mit dem effektiven Potential

$$U(r) := V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (2.42)$$

*) Dies folgt zunächst nur für $\dot{r} \neq 0$. Durch Umrechnen der Newtonschen Gleichungen auf Polarkoordinaten findet man aber, dass (2.41) immer gilt. Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus (siehe Kap. 3) kann man aber solche "mühsamen" Rechnungen umgehen. Deshalb führen wir sie hier nicht aus.

Die Radialbewegung genügt also einer Newtonschen Gleichung, wobei zum Potential V noch das Zentrifugalpotential $L^2/2mr^2$ hinzukommt. Dieses ist abstossend und dominiert meistens für kleine r (Zentrifugalbarriere). Ein wichtiges Bsp. für $V(r)$ und $U(r)$ ist in der folgenden Fig. 2.11 aufgezichnet

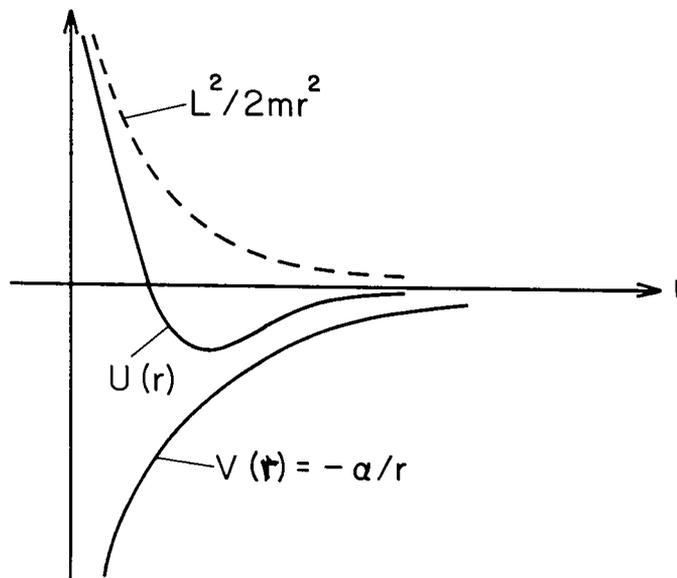


Fig. 2.11

Aus dem Energiesatz (2.40), d.h. aus

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) = E, \quad (2.40')$$

können wir durch Trennung der Variablen den Zeitverlauf finden

$$t(r) - t(r_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}}. \quad (2.43)$$

Interessieren wir uns nur für die Bahnkurve $r(\varphi)$, so folgt diese mit (2.39) aus

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{L}{mr^2\dot{r}} = \frac{L}{mr^2} \frac{1}{\left[\frac{2}{m}(E-U(r))\right]^{\frac{1}{2}}},$$

oder

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{ds}{s^2 \sqrt{E-U(s)}}. \quad (2.44)$$

Die Umkehrpunkte ergeben sich aus

$$U(r_i) = E = V(r_i) + \frac{L^2}{2mr_i^2}.$$

Bei diesen ist $\dot{r} = 0$, aber $\dot{\varphi} \neq 0$ für $L \neq 0$. Seien $r_1 < r_2$ zwei Umkehrpunkte für gegebenes E und L (s. Fig. 2.12). Dann ändert sich φ bei der Bewegung von r_1 nach

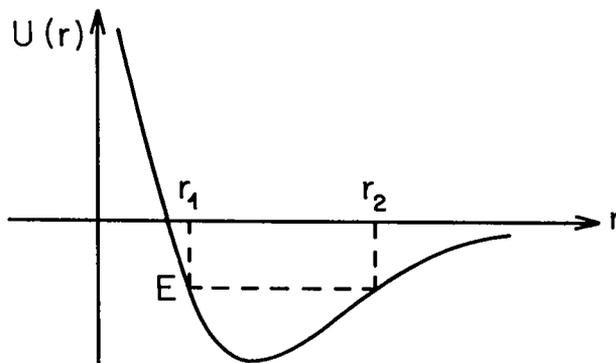


Fig. 2.12

r_2 und wieder zurück um (siehe 2.44)):

$$\Delta\varphi = L \sqrt{2/m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s^2 \sqrt{E-U(s)}}. \quad (2.45)$$

Die Bahn ist in diesem Fall eine "Rosettenbahn" (siehe Fig. 2.13, sowie die Übungen). Was passiert, wenn die Bahn nur einen Umkehrpunkt hat ?

Nach einem Satz von Bertrand sind $V(r) = -\alpha/r$, $\alpha > 0$ und $V(r) = \alpha r^2$, $\alpha > 0$, die einzigen Potentiale, für die alle beschränkten Bahnen periodisch sind.

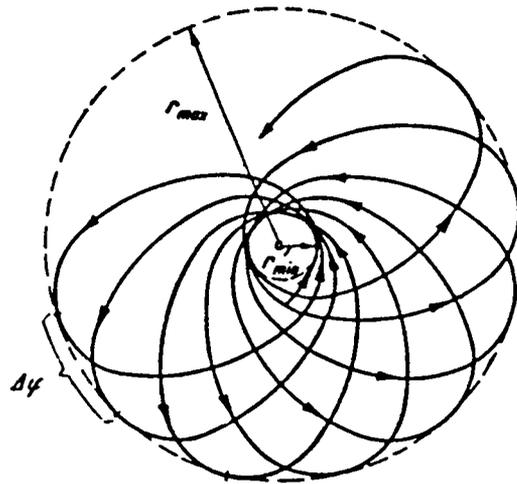


Fig. 2.13

Das Keplerproblem

Wir spezialisieren jetzt das Zweiteilchenpotential auf das Newtonsche Gravitationspotential

$$V(r) = - \frac{Gm_1 m_2}{r} \quad . \quad (2.46)$$

Das effektive Potential $U(r)$ haben wir in Fig. 2.11 skizziert. Die Umkehrpunkte (für gegebene Energie E) sind Lösungen von $E = -\alpha/r + L^2/2mr^2$, $\alpha := Gm_1 m_2 > 0$, d.h.

$$r_1 = \frac{L^2}{2m\alpha} \quad , \quad \text{für } E = 0 \quad ,$$

$$r_1 = -\frac{\alpha}{2E} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2mE}} \quad , \quad \text{für } E > 0 \quad , \quad (2.47)$$

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2mE}} \quad , \quad 0 > E \geq U_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2} \quad .$$

$E = U_{\min}$ ist der einzige kritische Energiewert (siehe Graph von U). Für $E > 0$ sind alle Bahnen Streubahnen, und für $0 > E > U_{\min}$ liegen beschränkte Bahnen vor mit periodischer r -Abhängigkeit, während für $E = U_{\min}$ eine Kreisbahn vorliegt.

Die Gleichung (2.44) kann man analytisch lösen. Man erhält für das Integral

$$\varphi = \arccos \frac{\tau^{-1} - \alpha m / L^2}{(\alpha^2 m^2 / L^4 + 2mE / L^2)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad (2.48)$$

oder

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad , \quad (2.49)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (1 + 2EL^2/m\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \\ p &= L^2/m\alpha \equiv a(1 - \varepsilon^2) \quad . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dies ist ein Kegelschnitt. Um dies zu sehen, stellen wir die Bahn in Cartesischen Koordinaten (x_1, x_2) dar. Für $E = 0$ ist $\varepsilon = 1$ und

$$x_2^2 + 2px_1 - p^2 = 0 \quad .$$

Dies ist eine Parabel:

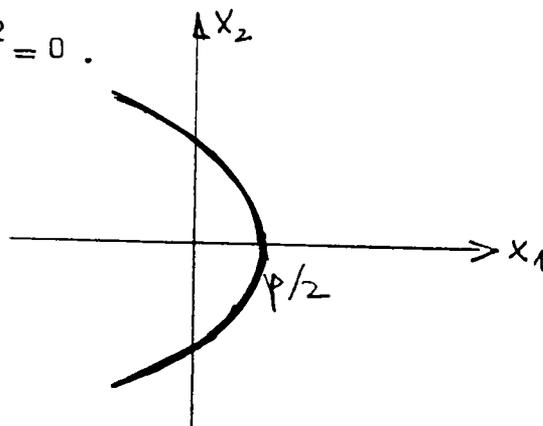


Fig. 2.14

Für $E < 0$ ist

$$0 \leq \varepsilon = \left(1 - 2 \frac{|E|L^2}{m\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

und

$$\frac{(x_1 + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{(1 - \varepsilon^2)a^2} = 1, \quad (2.51)$$

d.h. die Bahn ist eine Ellipse mit der grossen Halbachse $a = \alpha/2|E|$, unabhängig von L . Die Exzentrizität ist aber L -abhängig. Ferner ist der Schwerpunkt $(x_1, x_2) = 0$ in einem Brennpunkt.

$$r_{\min} = a(1 - \varepsilon)$$

$$r_{\max} = a(1 + \varepsilon).$$

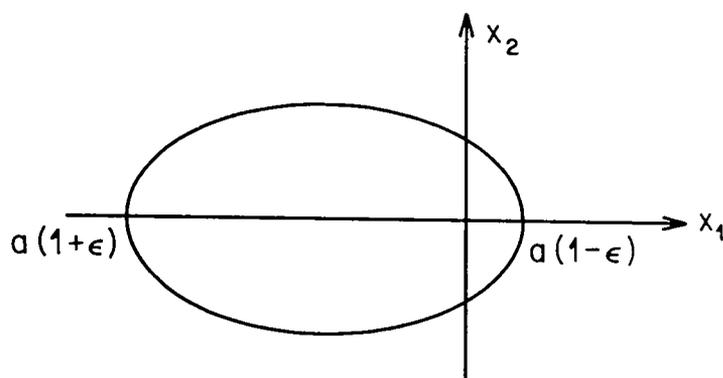


Fig. 2.15

Im Spezialfall $E = U_{\min}$ ist $\varepsilon = 0$, wie wir schon wissen. Auch das 3. Keplergesetz folgt sehr einfach: Die Flächengeschwindigkeit ist $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = L/2m$, also ist die Umlaufzeit

$$T = \text{Fläche der Ellipse} / \frac{L}{2m} = \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \frac{2m}{L} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{3/2}. \quad (2.52)$$

Beachte:

$$\frac{\alpha}{m} = G m_1 m_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \simeq G m_{\odot}, \quad \text{für das Sonnensystem.}$$

$E > 0$: Hier ist $\varepsilon > 1$, $a = \frac{\alpha}{2E} = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$ und mit

$b := \sqrt{e^2 - 1} a$ erhält man

$$\frac{(x_1 - \epsilon a)^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad (2.53)$$

und dies ist die Gleichung einer Hyperbel (s. Fig. 2.16). Der Winkel χ in der Fig. 2.16 ist ein Mass für die Ablenkung des Teilchens und ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}. \quad (2.54)$$

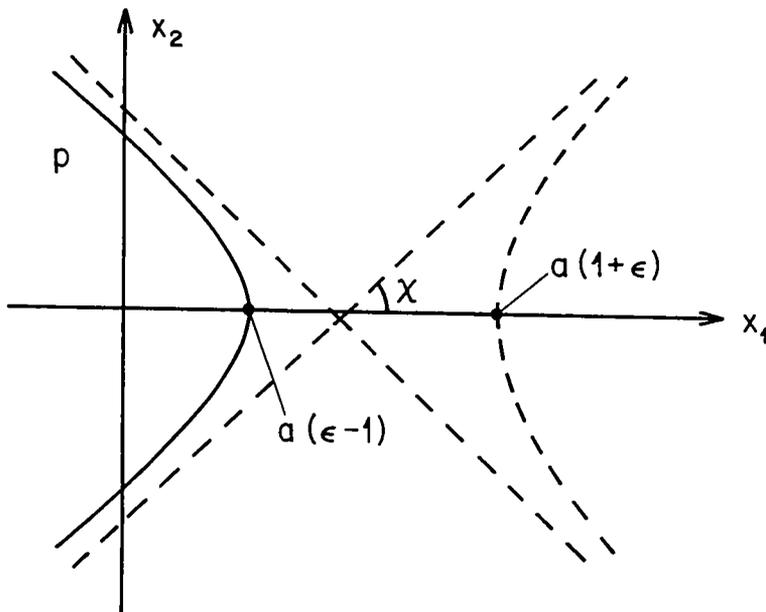


Fig. 2.16

Algebraische Lösungsmethode des Keplerproblems

In der ersten Übungsserie wurde gezeigt, dass der Lenzsche Vektor

$$\underline{A} := \underline{p} \wedge \underline{L} - \alpha m \underline{x} / |\underline{x}|$$

ein Integral der Bewegung ist. Da sieben autonome Integrale $H, \underline{L}, \underline{A}$ konstant sind auf jeder (1-dimensionalen) Trajektorie

im 6-dimensionalen Phasenraum, so sollte es mindestens zwei Relationen zwischen diesen geben. Nun findet man leicht

$$\underline{L} \cdot \underline{A} = 0, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}^2 &= \alpha^2 m^2 - \frac{2\alpha m}{|\underline{x}|} (\underline{p} \wedge \underline{L}) \cdot \underline{x} + (\underline{p} \wedge \underline{L})^2 \\ &= \alpha^2 m^2 + 2m H \underline{L}^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Wir betrachten den Fall $L \neq 0$. Für $\alpha < 0$ ist $H > 0$ und $\underline{A}^2 > 0$. Für $\alpha > 0$ ist $\underline{A}^2 = 0$ nur für $H = U_{\min} = -m\alpha^2/2L^2$, in welchem Fall nur eine Kreisbahn möglich ist. Im interessanten (generischen) Fall $\underline{A} \neq 0$, $\underline{L} \neq 0$ definiert \underline{A} in der (1,2)-Ebene senkrecht zu \underline{L} die 1-Achse und den Polarwinkel φ :

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot \underline{A} &= r |\underline{A}| \cos \varphi = r A \cos \varphi = \underline{x} \cdot (\underline{p} \wedge \underline{L}) - m\alpha r = \\ &= L^2 - m\alpha r. \end{aligned}$$

Mit $p := L^2/m|\alpha|$, $\varepsilon = A/m|\alpha|$ ist

$$r = \operatorname{sgn} \alpha \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (2.57)$$

und wir erhalten wieder das frühere Resultat.

Bemerkungen:

1) Wir bestimmen die Trajektorie von $\underline{p}(t)$, unter Beachtung von

$$\underline{L} \wedge \underline{A} = L^2 \underline{p} - \alpha m \underline{L} \wedge \underline{x} / |\underline{x}|$$

was folgendes ergibt

$$|\underline{p} - L^{-2}(\underline{L} \wedge \underline{A})|^2 = \alpha^2 m^2 / L^2 \quad (2.58)$$

d.h. $\underline{p}(t)$ beschreibt einen Kreis.

2) Vor der Wellenmechanik hat W. Pauli in einer berühmten Arbeit das quantenmechanische Keplerproblem mit H , \underline{L} , \underline{A} rein algebraisch lösen können. (Z.Physik, 36, 336 (1926)).

2.4 Beschleunigte Bezugssysteme

Als Vorbereitung, sowie im Hinblick auf spätere Bedürfnisse, besprechen wir zuerst die Drehgruppe.

A. Exkurs über die Drehgruppe

Für ein Element $R \in SO(n, \mathbb{R})$ studieren wir zunächst die Eigenwertgleichung

$$Rx = \lambda x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.59)$$

Auf Grund der Orthogonalität von R folgt aus (2.59)

$$(Rx, Rx) = (x, x) = \lambda^2 (x, x).$$

Für $x \neq 0$ ist also $\lambda = \pm 1$. Nun betrachten wir das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \text{Det}(R - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + \dots + \text{Det } R \lambda^0. \quad (2.60)$$

Für ungerades n gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \chi(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \chi(\lambda) = -\infty.$$

Da $\chi(0) = \text{Det } R = 1 > 0$, existiert deshalb ein $\lambda_0 > 0$, mit $\chi(\lambda_0) = 0$. Dieses λ_0 ist ein Eigenwert von R und deshalb notwendigerweise gleich $+1$. Damit haben wir gezeigt:

In ungerader Dimension hat jede Rotation einen invarianten Vektor.

Von jetzt an beschränken wir uns auf $SO(3, \mathbb{R})$. Für $R \neq 1$ kann es nicht zwei linear unabhängige invariante Vektoren geben. Denn wäre $Ra = a$, $Rb = b$, a, b linear unabhängig, so wäre die Gerade $\{a, b\}^\perp$ invariant unter R . Für $c \in \{a, b\}^\perp$ würde also gelten: $Rc = \lambda c$, $\lambda = \pm 1$. Aus $\text{Det } R = 1$

folgt aber $\lambda = +1$, d.h. $R = 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Die invarianten Vektoren bilden also einen 1-dimensionalen Unterraum (Rotationsachse).

Wie lässt sich die Rotationsachse aus R finden? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir $\Omega := \frac{1}{2} (R - R^T)$. Die Matrix Ω ist antisymmetrisch und hat deshalb die Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Für $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Omega \underline{x} = \underline{\omega} \wedge \underline{x}. \quad (2.62)$$

Für einen unter R invarianten Vektor \underline{a} ist

$$\Omega \underline{a} = \frac{1}{2} (R - R^T) \underline{a} = \frac{1}{2} (R \underline{a} - R^{-1} \underline{a}) = 0.$$

Also ist $\underline{\omega} = \lambda \underline{a}$, d.h. $\underline{\omega}$ liegt in der Rotationsachse.

Nun zerlegen wir $\mathbb{R}^3 = \{\lambda \underline{\omega}\} \oplus E_2$, wobei E_2 senkrecht auf $\underline{\omega}$ steht. Adaptieren wir eine orientierte, orthonormierte Basis an diese Zerlegung: $E_2 = \{e_1, e_2\}$, $e_3 = \lambda \underline{\omega}$, $\lambda > 0$, dann hat R in dieser, auf Grund der Orthogonalität, die Form

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Dies stellt eine Rotation um die $\underline{\omega}$ -Achse um den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn dar.

Beachte

$$\text{Sp } R = 1 + 2 \cos \varphi. \quad (2.64)$$

Wir wollen nun (2.63) in der kanonischen Basis von \mathbb{R}^3 darstellen. Dazu notieren wir:

$$R\underline{e}_1 = \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2 = \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_1$$

$$R\underline{e}_2 = -\sin \varphi \underline{e}_1 + \cos \varphi \underline{e}_2 = \cos \varphi \underline{e}_2 + \sin \varphi \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_2 ,$$

da $\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_1$, $\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_2 = -\underline{e}_1$. Für einen Vektor \underline{z} in der Ebene E_2 gilt also

$$R\underline{z} = \cos \varphi \underline{z} + \sin \varphi \underline{e}_3 \wedge \underline{z} .$$

Einen allgemeinen Vektor \underline{x} zerlegen wir gemäss

$$\underline{x} = \underbrace{(\underline{e}_3, \underline{x}) \underline{e}_3}_{\perp E_2} + \underbrace{[\underline{x} - (\underline{e}_3, \underline{x}) \underline{e}_3]}_{\in E_2} ,$$

Offensichtlich gilt (wenn $\underline{e} := \underline{e}_3 = \hat{\underline{w}}$) :

$$R\underline{x} = (\underline{e}, \underline{x}) \underline{e} + \cos \varphi [\underline{x} - (\underline{e}, \underline{x}) \underline{e}] + \sin \varphi \underline{e} \wedge \underline{x} ,$$

oder

$$R\underline{x} = \cos \varphi \underline{x} + (1 - \cos \varphi) (\underline{e}, \underline{x}) \underline{e} + \sin \varphi \underline{e} \wedge \underline{x} . \quad (2.65)$$

Umgekehrt stellt die rechte Seite von (2.65) eine Drehung $R(\underline{e}, \varphi)$ um \underline{e} ($|\underline{e}| = 1$) mit dem Drehwinkel $0 \leq \varphi < 2\pi$ dar (Übungsaufgabe).

Für festes \underline{e} bilden die $R(\underline{e}, \varphi)$ eine 1-parametrische Untergruppe von $SO(3, \mathbb{R})$:

$$R(\underline{e}, \varphi_1) R(\underline{e}, \varphi_2) = R(\underline{e}, \varphi_1 + \varphi_2) . \quad (2.66)$$

Dies folgt aus der geometrischen Bedeutung von $R(\underline{e}, \varphi)$ oder rechnerisch aus (2.63).

Nun zeigen wir, dass (2.65) auch folgendermassen geschrieben werden kann

$$R(\underline{e}, \varphi) = \exp (\varphi \underline{I} \cdot \underline{e}) , \quad (2.67)$$

wobei

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Dies beweist man am besten so: Nach (2.66) erfüllt $R(\underline{e}, \varphi)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varphi} R(\underline{e}, \varphi) = \Omega R(\underline{e}, \varphi), \quad (2.69)$$

wobei

$$\Omega := \left. \frac{d}{d\varphi} R(\underline{e}, \varphi) \right|_{\varphi=0}.$$

Aus (2.65) erhält man sofort

$$\Omega \underline{x} = \underline{e} \wedge \underline{x},$$

d.h.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{I} \cdot \underline{e}. \quad (2.70)$$

Dieselbe Differentialgleichung (2.69) erfüllt aber die rechte Seite von (2.67). Da sich (2.65) und (2.67) für $\varphi = 0$ auf die Identität reduzieren, folgt die Behauptung aus dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen. Die I_i , $i=1,2,3$, bilden eine Basis der Liealgebra von $SO(3, \mathbb{R})$ (vgl. den Anhang II). Die Vertauschungsrelationen lauten:

$$[I_i, I_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} I_k. \quad (2.71)$$

B. Transformation der Bewegungsgleichungen auf beschleunigte Bezugssysteme

Es sei K ein Inertialsystem und K' ein starres Bezugssystem, welches gegen K eine beschleunigte Bewegung (Translation und Rotation) ausführt. Die Bahn eines Massenpunktes habe die Cartesischen Komponenten $\underline{x}(t)$ und $\underline{x}'(t)$ bezüglich K , resp. K' . Zwischen diesen Koordinaten bestehen die Beziehungen

$$\underline{x}(t) = R(t) \underline{x}'(t) + \underline{a}(t), \quad R(t) \in SO(3, \mathbb{R}). \quad (2.72)$$

Für die Komponenten \underline{u} und \underline{u}' eines Vektors gilt hingegen

$$\underline{u}(t) = R(t) \underline{u}'(t). \quad (2.73)$$

Wir berechnen zunächst die zeitliche Änderung von $\underline{u}(t)$:

$$\dot{\underline{u}} = \dot{R} \underline{u}' + R \dot{\underline{u}}' = \dot{R} R^{-1} \underline{u} + R \dot{\underline{u}}'. \quad (2.74)$$

Wegen $RR^T = R^T R = 1$, gilt

$$0 = \dot{R} R^{-1} + R \dot{R}^T = \dot{R} R^{-1} + (\dot{R} R^{-1})^T.$$

Daher ist $\Omega := \dot{R} R^{-1}$ schief und hat also die Form (2.61), d.h.

$$\Omega = -\Omega^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Für $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Omega \underline{a} = \underline{\omega} \wedge \underline{a}. \quad (2.76)$$

Nun sei

$$\Omega =: R \Omega' R^{-1}. \quad (2.77)$$

Dann ist

$$\Omega' = R^{-1} \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

und $\underline{\omega} = R\underline{\omega}'$.

Aus (2.74) folgt

$$\dot{\underline{u}} = \underline{\Omega} \underline{u} + R\dot{\underline{u}}' = \underline{\omega} \wedge \underline{u} + R \dot{\underline{u}}'. \quad (2.79)$$

Für einen Massenpunkt, welcher im beschleunigten System K' ruht, ist $\underline{u}' = 0$ und also $\dot{\underline{u}} = \underline{\omega} \wedge \underline{u}$; deshalb ist nach (2.62) $\underline{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit bezüglich K und $\underline{\omega}'$ ist die Winkelgeschwindigkeit bezüglich K' . Aus (2.79) entnehmen wir die wichtige Beziehung

$$\dot{\underline{u}} = R(\dot{\underline{u}}' + \underline{\omega}' \wedge \underline{u}') . \quad (2.80)$$

Aus (2.72) folgt analog

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{a}} + R(\dot{\underline{x}}' + \underline{\omega}' \wedge \underline{x}') . \quad (2.81)$$

Entsprechend gilt für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{x}} &= \ddot{\underline{a}} + \underbrace{\dot{R}} \dot{\underline{x}}' + R \ddot{\underline{x}}' + \dot{\underline{\omega}} \wedge R\underline{x}' + \underline{\omega} \wedge \underbrace{\dot{R}\underline{x}'}_{\underline{\omega} \wedge R\underline{x}'} + \underline{\omega} \wedge R\dot{\underline{x}}' \\ &= \ddot{\underline{a}} + 2 \underline{\omega} \wedge R\dot{\underline{x}}' + R\ddot{\underline{x}}' + \dot{\underline{\omega}} \wedge R\underline{x}' + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge R\underline{x}') . \end{aligned}$$

Darin benutzen wir noch

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\omega}} &= (R\underline{\omega}')^\cdot = R\dot{\underline{\omega}}' + \underbrace{\dot{R}} \underline{\omega}' = R\dot{\underline{\omega}}' \\ &\quad \underbrace{\dot{R}R^{-1}}_{\underline{\Omega}} R\underline{\omega}' = \underline{\Omega} \underline{\omega} = \underline{\omega} \wedge \underline{\omega} = 0 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\ddot{\underline{x}} = \ddot{\underline{a}} + R \left[\ddot{\underline{x}}' + \underbrace{2\underline{\omega}' \wedge \dot{\underline{x}}'}_{\text{(Coriolisbeschleunigung)}} + \underbrace{\underline{\omega}' \wedge (\underline{\omega}' \wedge \underline{x}')}_{\text{(Zentrifugalbeschleunigung)}} + \dot{\underline{\omega}}' \wedge \underline{x}' \right] . \quad (2.82)$$

Nun können wir die Bewegungsgleichungen bezüglich K' aufstellen. Im Inertialsystem K gilt $m\ddot{\underline{x}} = \underline{F}$. Aus (2.82) er-

halten wir mit $\underline{F} = R\underline{F}'$:

$$m\ddot{\underline{x}}' = \underline{F}' - m\underline{\omega}' \wedge (\underline{\omega}' \wedge \underline{x}') - 2m\underline{\omega}' \wedge \dot{\underline{x}}' - m\dot{\underline{\omega}}' \wedge \underline{x}' - mR^T \ddot{\underline{a}} . \quad (2.83)$$

Auf der rechten Seite von (2.83) treten als Scheinkräfte u.a. die Zentrifugal- und die Corioliskraft auf.

Die Scheinkräfte hängen in sehr spezieller Weise von \underline{x}' und $\dot{\underline{x}}'$ ab. Werden derartige Kräfte beobachtet, so kann man dies als Anzeichen dafür ansehen, dass man die Bewegung nicht auf ein Inertialsystem bezogen hat. Durch eine geeignete Transformation der Form (2.72) kann man sie wegtransformieren.

An diese Stelle gehören die folgenden Bemerkungen, welche in der Allgemeinen Relativitätstheorie wichtig werden. Betrachtet man nur die Schwerkraft, so stellt sich die Frage, ob auch diese eine Scheinkraft ist. Für ein homogenes Schwerfeld lautet ja die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\underline{x}} = m \underline{g} , \quad \underline{g} = \text{const.}$$

Führen wir die Transformation

$$\underline{x}(t) = \underline{x}'(t) + \frac{1}{2} \underline{g} t^2$$

aus $[\underline{a}(t) = \frac{1}{2} \underline{g} t^2$ und $R = 1$ in (2.72)], so ergibt sich aus (2.83)

$$m \ddot{\underline{x}}' = m \underline{g} - m \ddot{\underline{a}} = 0 .$$

Damit ist die Wirkung der Schwerkraft wegtransformiert. Dies bedeutet: Kann im Inneren eines freifallenden Systems das Gravitationsfeld als homogen angesehen werden, so übt die Schwerkraft keine Wirkung aus. Diese kann "lokal" wegtransformiert werden. Strikte ist das für inhomogene Gravitationsfelder nur

"infinitesimal"möglich. [Die "Gezeitenkräfte" lassen sich nicht wegtransformieren.] Diese besondere Eigenschaft der Gravitation beruht natürlich wesentlich auf der strengen Proportionalität von träger und schwerer Masse. Ueber dieses Naturgesetz hat sich schon Newton gewundert. In neuerer Zeit wurde es experimentell bis zu unglaublicher Genauigkeit (~ 1 in 10^{12}) bestätigt. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse findet in der Newtonschen Theorie keine Erklärung. Sie bildet aber eine wichtige Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie. In dieser wird das Gravitationsfeld "geometrisch" beschrieben. Man hat es dabei nicht nötig, die träge und die schwere Masse separat einzuführen, bloss um sie später wieder zu identifizieren.

C. Freier Fall auf der rotierenden Erde

Wir vernachlässigen in diesem Problem in (2.83) den Term $- m \dot{\underline{\omega}}' \wedge \underline{x}'$ (Polschwankungen) und ebenso $- m R^T \ddot{\underline{a}}$ (Umlauf der Erde um die Sonne).

Die statisch (!) bestimmte Erdanziehungskraft $m \underline{g}'$ ist die Summe von Zentrifugal- und Gravitationskraft. Damit lauten die Newtonschen Gleichungen bezüglich des mit der Erde festverankerten Systems:

$$\ddot{\underline{x}}' = \underline{g}' - 2 \underline{\omega}' \wedge \dot{\underline{x}}' . \quad (2.84)$$

Das erdfeste System wählen wir gemäss Fig. 2.17:

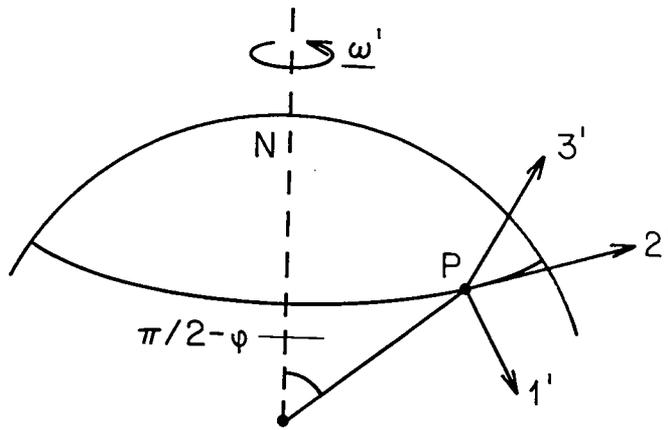


Fig. 2.17

Die geographische Breite bezeichnen wir mit φ . Ferner sei:

1': Nord-Süd-Richtung auf der Erde;

2': West-Ost " " " "

3': Normale zum Geoid.

Beachte, dass die Abplattung der Erdoberfläche durch die Resultierende \underline{g}' bestimmt wird, nämlich so, dass das Geoid auf ihr überall senkrecht steht. Deshalb ist $\underline{g}' = (0, 0, -g)$.

Ferner ist $\underline{\omega}' = (-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi)$. Mit den Bezeichnungen $\underline{x}' = (\xi, \eta, \zeta)$ lautet deshalb (2.84) ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2 \omega \sin \varphi \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} &= -2 \omega \sin \varphi \dot{\xi} - 2 \omega \cos \varphi \dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} &= -g + 2 \omega \cos \varphi \dot{\eta}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Die Corioliskraft ist wirtlos. Deshalb gilt der Energiesatz

$$\frac{d}{dt} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + 2g\zeta) = 0. \quad (2.86)$$

Wir integrieren (2.85) für die Anfangsbedingungen

$$\xi = \eta = \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0, \quad \zeta = h > 0, \quad \text{für } t = 0. \quad (2.87)$$

Aus der ersten und dritten Gleichung in (2.85) ergibt sich durch Integration

$$\dot{\xi} = 2\omega \sin \varphi \eta, \quad \dot{\zeta} = -gt + 2\omega \cos \varphi \eta. \quad (2.88)$$

Einsetzen in die 2. Gleichung von (2.85) gibt

$$\ddot{\eta} + 4\omega^2 \eta = 2gt \omega \cos \varphi. \quad (2.89)$$

Die Integration dieser linearen (!) Gleichung geschieht nach der allgemeinen Regel: "Partikuläres Integral der inhomogenen + allgemeines Integral der homogenen Gleichung". Dies führt zum Ansatz:

$$\eta = \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t + A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t.$$

Aus den Anfangsbedingungen (2.87) folgt

$$B = 0, \quad 2\omega A = -\frac{g \cos \varphi}{2\omega},$$

d.h.

$$\eta = \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right). \quad (2.90)$$

Dies ist die Ostablenkung (vgl. Fig. 2.17). ξ ist die Süda-
ablenkung. Sie berechnet sich nach (2.88) und (2.90) aus

$$\dot{\xi} = g \cos \varphi \sin \varphi \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right)$$

und wird mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen (2.87)

$$\xi = g \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{(2\omega)^2} \right). \quad (2.91)$$

Schliesslich erhält man ζ aus (2.88), (2.90) und $\zeta = h$ für $t = 0$:

$$\zeta = h - \frac{gt^2}{2} + g \cos^2 \varphi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{(2\omega)^2} \right). \quad (2.92)$$

Nun ist ωt eine sehr kleine Zahl, von der Grössenordnung Fallzeit/Tag. Deshalb entwickeln wir nach Potenzen von ωt und erhalten

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{gt^2}{3} \cos \varphi \sin \omega t, & \xi &= \frac{gt^2}{6} \sin \varphi \cos \varphi (\omega t)^2 \\ \zeta &= h - (gt^2/2) \left(1 - \frac{1}{3} \cos^2 \varphi (\omega t)^2\right). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Die Ostablenkung ist hier nach von der ersten, die Südablenkung von der zweiten Ordnung in ωt . Auch die durch die Erdrotation hervorgerufene Abweichung in der Vertikalen ist nur von zweiter Ordnung. Die Ostablenkung ist schon früh beobachtet und in Uebereinstimmung mit der Theorie befunden worden. Für einen tiefen Bergwerksschacht beträgt sie einige Zentimeter.

D. Das Foucault'sche Pendel

Nun betrachten wir ein "sphärisches Pendel", d.h. einen Massenpunkt, der unter der Wirkung der Schwerkraft sich auf einer Kugeloberfläche bewegen muss, weil er mit einem masselosen Faden gehalten wird. Dieser sei im Koordinatenursprung $\xi = \eta = \zeta = 0$ festgemacht. Der Faden übt auf den Massenpunkt eine Zwangskraft aus (siehe auch Kap. 4), welche zum Aufhängepunkt gerichtet ist. Zu (2.84) müssen wir also einen Term $-\lambda \underline{x}'$, mit einer noch unbekanntenen Konstanten λ , hinzufügen. An Stelle von (2.85) erhalten wir deshalb die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2\omega \sin \varphi \dot{\eta} - \lambda \xi \\ \ddot{\eta} &= -2\omega \sin \varphi \dot{\xi} - 2\omega \cos \varphi \dot{\zeta} - \lambda \eta \\ \ddot{\zeta} &= -g + 2\omega \cos \varphi \dot{\eta} - \lambda \zeta. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Daneben gilt die Zwangsbedingung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2, \quad (2.95)$$

wenn l die Länge des Fadens ist.

Wir betrachten nur kleine Pendelschwingungen: ξ/l , $\eta/l \ll 1$. Dann folgt aus (2.95), dass ζ^2/l^2 gleich 1 ist, bis auf kleine Grössen 2. Ordnung. In einer Umgebung der Ruhelage ist also $\zeta = -l(1+0_2)$, 0_2 : Grösse 2. Ordnung. Aus der 3. Gleichung von (2.94) ergibt sich deshalb in führender Ordnung

$$\lambda = g/l. \quad (2.96)$$

Wir schreiben jetzt die beiden ersten Gleichungen von (2.94) nochmals hin, unter Vernachlässigung des Gliedes mit $\dot{\zeta}$, weil dieses von 2. Ordnung ist:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2\omega \sin \varphi \dot{\eta} - (g/l)\xi \\ \ddot{\eta} &= -2\omega \sin \varphi \dot{\xi} - (g/l)\eta. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Die beiden Gleichungen können wir komplex zusammenfassen.

Ist $\varrho := \xi + i\eta$, dann erhalten wir die homogene lineare Gleichung

$$\ddot{\varrho} + 2i\omega \sin \varphi \dot{\varrho} + \frac{g}{l}\varrho = 0. \quad (2.98)$$

Ansatz:

$$\varrho = a_1 e^{i\alpha_1 t} + a_2 e^{i\alpha_2 t}. \quad (2.99)$$

Eingesetzt gibt

$$\alpha_{1,2} = -\omega \sin \varphi \pm \sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + g/l}. \quad (2.100)$$

Für $t = 0$ sei $\xi = a$, $\dot{\xi} = \dot{\eta} = \eta = 0$. Wir denken uns also das Pendel aus der lotrechten Lage in Richtung der positiven ξ -Achse (vgl. Fig. 217) im Meridian nach Süden um die Strecke a herausgehoben und ohne Anstoss freigelassen.

Dann gilt für $t = 0$: $\varrho = a$, $\dot{\varrho} = 0$. Daher ist nach (2.99)

$$a_1 + a_2 = a, \quad a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 = 0,$$

also

$$a_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{a\omega \sin \varphi}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + g/l}} \quad (2.101)$$

Wir interessieren uns für $\dot{\vartheta}$:

$$\dot{\vartheta} = -a \frac{g/l}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + g/l}} e^{-i\omega t \sin \varphi} \sin \left(t \sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + g/l} \right) \quad (2.102)$$

Daraus können wir folgendes schliessen. Immer wenn der letzte Faktor in (2.102) verschwindet, d.h. für

$$t = \frac{n}{2} T, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + g/l}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.103)$$

ist $\dot{\vartheta} = 0$, d.h. $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$. Dies bedeutet das Auftreten einer Spitze in der Bahnkurve des Pendels (vgl. Fig. 2.18). Eine solche hatten wir nach den Anfangsbedingungen erstmals für $t = 0$. Die nächsten Spitzen treten für $\frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, \dots$ auf. T ist die Zeitdauer eines Hin- und Rückganges. Sie stimmen für $\omega = 0$ mit der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ohne Erdrotation überein.

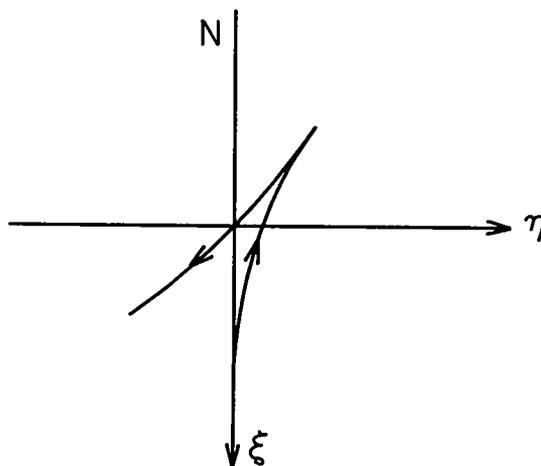


Fig. 2.18

Wo ist der Pendelkörper zur Zeit T ? Nach (2.99) ist

$$\begin{aligned} \vartheta(T) &= a_1 e^{-i\omega T \sin \varphi + 2\pi i} + a_2 e^{-i\omega T \sin \varphi - 2\pi i} \\ &= (a_1 + a_2) e^{-i\omega T \sin \varphi} = a e^{-i\omega T \sin \varphi} . \end{aligned}$$

Der Pendelkörper hat also den Abstand a von der Ruhelage, wie zu Anfang, aber sein Azimut liegt nicht im Meridian nach Süden, wie am Anfang des Versuchs, sondern ist dahinter zurückgeblieben um den Winkel

$$\omega T \sin \varphi = \frac{2\pi \omega \sin \varphi}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + g/l}} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \omega \sin \varphi , \quad (2.104)$$

und zwar nach Westen (vgl. Fig. 2.18) .

Foucaults Versuch von 1851 und die seiner zahllosen Nachfolger gaben nur qualitative Resultate; eine quantitative Untersuchung aller Fehlerquellen führte H. Kamerlingh Onnes (der spätere Meister tiefer Temperaturen und Entdecker der Supraleitung) in seiner Groninger Dissertation von 1879 durch.

* * *

